Universidade Federal do Amapá
Curso de Licenciatura em Física

Iago Filipe de Souza Silva

ASPECTOS RELATIVÍSTICOS RELACIONADOS À MASSA

Macapá-AP
Junho 2016

Iago Filipe de Souza Silva

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao colegiado de Física da Universidade Federal do Amapá como requisito para a obtenção do grau de graduação em Licenciatura Plena em Física sob orientação do Prof. Dr. Ederson Staudt.

COMISSÃO EXAMINADORA

Prof. Dr. Ederson Staudt
Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Prof. Dr. Rafael Martinez Rodriguez
Universidade Federal do Amapá

Prof. Ms. Nilson dos Santos Ferreira
Universidade Federal do Amapá

Macapá-AP

Junho 2016

“O único lugar aonde o sucesso vem antes do trabalho é no dicionário.”

Albert Einstein

RESUMO

É possível perceber que o conceito de massa, no decorrer dos estudos da física, recebe diversos significados como, por exemplo, o conceito de massa inercial e massa gravitacional, na mecânica newtoniana. Mas é ao adentrarmos no contexto relativista, que esta grandeza ganha um novo significado, que difere daquele concebido por Newton e seus antecessores. Surgindo neste cenário, o conceito de massa relativística, que é equivocadamente apresentada, em muitos casos, como uma “massa” dependente da velocidade. Também se estabelece neste contexto, a relação massa-energia, onde é possível “converter-se” massa em energia. Motivado por tais definições, temos o intuito, neste trabalho, de apresentar um resgate o acerca do conceito de massa de forma a contribuir para a apresentação de um conceito mais geral e livre de interpretações obscuras ou duvidosas, abolindo a definição de massa dependente da velocidade em detrimento a relação massa-energia, onde ambos são a mesma propriedade que define uma única entidade. Entidade esta intrínseca do corpo, que hora se manifesta como massa e outrora manifestasse em outras formas de energia.

Palavras-chave: Massa, massa relativista, massa de repouso, massa-energia, transformações de Lorentz, relatividade restrita, quadrimomento.

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

Um dos aspectos, no atual debate associado ao ensino da Física em nível médio, o qual já vem se alongando a bastante tempo, é a inserção de temas de Física moderna (TERRAZAN, 1992). Neste quesito, alguns livros apresentam, mesmo que em forma de apêndices, temas deste gênero, o que traz duas consequências imediatas: a necessidade de uma linguagem científica correta na apresentação destes temas nos materiais de divulgação e a necessidade da formação adequada dos professores, que ministrarão esses temas, no sentido de possuírem algum tipo de referência qualificada sobre estes assuntos. Entretanto, estes livros, por diversas vezes, carregam consigo algumas interpretações equivocadas, sendo percebível que, um dos erros frequentemente presente é a interpretação equivocada das expressões relativistas $E=Mc^2$ e $\vec{p}=M\vec{v}$, e como consequência conduz a introdução dos conceitos de "massa de repouso" (m_o) e "massa relativista" (M). Desta maneira, M aparece como uma "massa" variante com a velocidade e operacionalmente descrita pelo produto da massa de repouso, massa esta medida no referencial em que a partícula se encontra em repouso, pelo fator adimensional de Lorentz. Diversos autores apegados às definições clássicas, utilizam-se desta expressão, na tentativa de estender o significado físico de medida de inércia a "massa relativista", levando-os a concluir equivocadamente que em diferentes velocidades ocorre uma mudança na massa da partícula, devido ao seu estado de movimento. Como vemos no trecho, a seguir, retirado do livro de ensino médio: *Fundamentos da Física*.

> "Massa do corpo é maior quando em movimento do que em repouso. O aumento de massa não significa que aumenta o número de partículas (átomos, moléculas, etc.) do corpo, e sim a inércia deste. Se o corpo atingisse a velocidade da luz, nenhuma força seria capaz de acelerá-lo, pois foi atingida a velocidade limite. Nesse caso a inércia do corpo seria infinita" Ramalho (2007)

É possível perceber que tal equívoco não ocorre apenas à nível médio, como percebesse, no trecho retirado do livro de nível superior *The Feynman Lectures on Physics*, em português traduzido como *Lições de Física de Feynman*, do famoso prêmio nobel de Física Richard P. Feynman, que está entre as leituras básicas de todo o curso de Física.

> "Durante mais de 200 anos, acreditou-se que as equações do movimento enunciadas por Newton descrevessem corretamente a natureza e, a primeira vez em que se descobre um erro nessas leis, o caminho de corrigi-lo também foi descoberto. Ambos, o erro e sua correção, foram descobertos por Einstein em 1905. A segunda lei de Newton, que expressamos pela equação $\mathrm{F}=\frac{d(mv)}{dt}$
> Foi enunciada sob uma suposição tácita de que *m* é uma constante, mas sabemos agora e isso não é verdade e que a massa de um corpo aumenta com a velocidade. Na fórmula corrigida de Einstein, *m* tem o valor $\mathrm{M}=\frac{m}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ " Feynman (2009, p. 15-1).

É interessante notar, que o conceito central nessa discussão é o conceito de massa. Ademais, vale ressaltar que o conceito de massa, apesar de sua antiguidade, como veremos abaixo, ainda nos brinda com relações surpreendentes, em diferentes cenários da física, quando conseguimos entender mais profundamente a natureza. Este é o caso, por exemplo, do conceito de massa efetiva na física da matéria condensada ou de partículas elementares ou a conexão da massa com a geometria do espaço-tempo na relatividade geral.

Nessa esteira de raciocínio, por questões de completeza e com o intuito de eliminar interpretações errôneas, apresentamos uma revisão histórica, acerca do conceito de massa, restrita ao intervalo da mecânica Newtoniana até a relatividade restrita. Buscamos realizar essa revisão, através de uma bibliografia geral, incluindo nesta, a análise dos livros didáticos de ensino de nível médio e superior, de apostilas e artigos científicos sobre o tema. Desta maneira, esperamos contribuir no suporte a abolição do conceito de massa relativista e da relação massa-velocidade, e sustentar a relação entre massa-energia, onde ambos são propriedades que definem uma mesma entidade, que hora se manifesta como massa e outrora como outras formas de energia. Isso se faz necessário tendo em vista que compartilhamos do seguinte ponto de vista:

> "Qualquer teoria Física consiste num conjunto de leis descritas por equações matemáticas acompanhadas de uma interpretação. A interpretação se modifica à medida que a teoria se desenvolve e a compreensão do seu conteúdo se torna mais profundo" Lemos (2001, p. 3).

Percebe-se assim que, o estabelecimento de uma nova teoria carrega muitas vezes a necessidade de reinterpretar certos conceitos, mesmo que estes sejam tomados como bem compreendidos e “intocáveis”, em um determinado instante, ao longo da evolução das teorias Físicas.

1.1. Problema

A física, mesmo que em nível bastante elementar, requer bastante esforço para ser bem compreendida por quem a estuda, assim a falta de rigor e cuidado na apresentação desta disciplina, principalmente nos tópicos de física moderna por diversos autores dos livros didáticos de Física em ensino médio, bem como os de nível superior, podem acarretar sérios problemas de aprendizagem significativa. Como exemplo, ao levantarem a discussão acerca da grandeza massa no cenário relativista e a introdução do conceito de massa relativista. Isto, por conseguinte, leva a disseminação de conceitos equívocos e errôneos por parte dos professores (o que atinge os seus alunos), que se utilizam destes materiais como base para a preparação de suas aulas e, por parte dos alunos, que buscam diretamente nos materiais bibliográficos a fonte para a construção do seu conhecimento científico.

Desta forma as seguintes perguntas dirigem este trabalho:

– É de fato a massa, uma grandeza que varia com a variação da velocidade?

– Qual o papel do fator de Lorentz na interpretação da massa relativística?

– Caso se consiga abolir a relação massa-velocidade, qual o conceito e a interpretação que deverá prevalecer?

1.2. Objetivo

1.2.1. Objetivo geral

Fazer uma revisão bibliográfica nos livros de ensino médio e superior, em apostilas e em diversos materiais, visando identificar erros conceituais ou confusos ao tratar-se do conceito de massa no cenário relativístico.

1.2.2. Objetivo específico

Com pretensão de atingir o objetivo principal estabeleceremos alguns objetivos específicos. Entre eles, estão:

- Analisar historicamente o conceito de massa.

• Revisitar e analisar as equações do momento e energia relativista, partindo da definição de espaço-tempo na relatividade.
• Compreender a contribuição do fator de Lorentz.
• Compreender a motivação e justificativa, do uso do conceito de massa relativista.
• Investigar a relação entre massa e energia.

1.3. Metodologia

Este trabalho foi desenvolvido através de uma pesquisa bibliográfica, utilizando-se de livros da biblioteca pública da UNIFAP e através de sites de periódicos da física e artigos científicos, que relacionavam de alguma maneira, a discussão a respeito do conceito de massa relativista, massa inercial e massa gravitacional, bem como conteúdos de relatividade restrita, subsidiando a base físico-matemática necessária na construção e análise do conceito de massa neste cenário.

2. CONSTRUÇÃO DO CONCEITO DE INÉRCIA E A EQUIVALÊNCIA ENTRE MASSA INERCIAL E GRAVITACIONAL

Ao analisarmos o conceito de massa ao longo da história da Física, encontramos diversos significados e conceitos associados a esta grandeza. Na mecânica newtoniana, quando focamos na segunda lei de Newton, esta grandeza é caracterizada como uma propriedade intrínseca da matéria, que mede a tendência dos corpos de conservar seu estado de movimento, seja ele de repouso ou de movimento retilíneo uniforme. Denominada de massa inercial (m) e operacionalizada pelo quociente do módulo da força resultante pelo módulo da aceleração resultante:

$$m=\frac{F}{a}$$

Na Física anterior a Einstein, percebe-se o aparecimento de outras definições para a massa, como por exemplos a *massa maupersiana*, a *massa cinética*, etc. Entretanto, o que se revelou de fato é que em todas as medidas, feitas em baixas velocidades se comparadas à velocidade da luz, destas diversas massas, conduziram sempre a um mesmo valor, que coincide com a massa inercial de

Newton (VALADARES, 1993, p. 111). Portanto, nos ateremos ao estudo, no cenário clássico, da construção do conceito da massa newtoniana, pois é este conceito que será levado a discussão, quando nos estendermos a Teoria da Relatividade Restrita (TRR).

2.1. A construção do conceito de inércia

O debate sobre o conceito de massa, ou inércia, no meio científico, surgiu anteriormente a mecânica newtoniana, com a contribuição de alguns brilhantes cientistas, como: Aristóteles, Philiponos, Buridan, Oresme, Galileu Galilei, René Descarte e Pierre Gassedi; ao contribuírem com a construção das definições de movimento, espaço e da própria inércia. Preparando assim, uma base sólida sobre a qual Isaac Newton se apoiaria para construir a sua “casa” de ideias, onde residiriam as suas leis de movimentos, incluindo nessas o seu princípio de inercia. Portanto, busquemos nos tópicos a seguir entender um pouco das contribuições de alguns destes cientistas que impulsionaram Newton.

2.1.1 Galileu Galilei

Galileu Galilei (1564-1642) foi um físico e astrônomo italiano, que marcou a quebra nas bases aristotélicas de pensamento de que corpos mais “pesados” caiam mais rápido do que corpos “menos pesados”, em seu trabalho revolucionário de *Duas novas Ciências* (CASTELLANI, 2001, p. 273). Neste trabalho, Galileu relata o estudo do movimento sobre o plano inclinado e que o levou à formulação leis para este movimento. Castellani (2001, p.273), destaca as leis deste movimento:

- Sob a ação de uma força constante (a gravidade), o espaço percorrido por um corpo é proporcional ao quadrado do tempo requerido;
- Sob a ação de uma força constante, um corpo se desloca de modo que a sua velocidade, em todo instante, é proporcional ao tempo empregado.

Não se restringindo apenas ao estudo de um único movimento sobre o seu plano inclinado, Galileu vai além e estende as suas análises as diversas outras situações possíveis de movimentos, focando-se principalmente, na existência do movimento sem força motora alguma que o provoque. Em seu artigo, *A construção do princípio da inércia*, Baptista (2000) destaca:

> “[…], a ação revolucionária de Galileu não se limitou a nos revelar estas leis, mas foi também estendida à análise do movimento em várias situações, principalmente naquela que ocupou mentes esclarecidas por séculos de estudos: a existência de movimento de um corpo sem a presença de motor algum a provocá-lo” Baptista (2000, p. 273).

Desta maneira, Galileu retorna então aos estudos no seu plano inclinado. Partido de um caso específico, onde se tinha um entendimento claro sobre o fenômeno ali descrito, Galileu buscou entender outras formas de movimentos ainda mal compreendidos. Fazendo análises minuciosas, de diversos casos de movimentos, através alterações progressivas e sistemáticas do seu experimento. Segundo Porto e Porto (2008), Galileu destacava a importância das quantidades físicas mensuráveis no estudo dos fenômenos.

> “Galileu,..., argumentava que, para se fazerem julgamentos exatos da Natureza, deveriam se considerar apenas as qualidades que fossem mensuráveis. Somente através de uma análise quantitativa poderíamos conhecer o mundo com segurança” Porto e Porto (2008, p. 4601-5).

Com a prática experimental Galileu concluiu que um corpo abandonado de certa altura de um plano inclinado de descida adquirirá uma determinada velocidade e alcançara a mesma altura da qual iniciou o seu movimento, ao se encontrar com outro plano inclinado de subida de mesma inclinação do plano de descida. (figura 1). Galileu então prossegue com seu experimento, reduzindo progressivamente a inclinação do plano de subida até que, a inclinação deste plano se tornou nula, como ilustrado na figura 2 (BAPTISTA, 2000, p.274).

Figura 1: Um corpo abandonado de um plano inclinado de descida, sem atrito, ira alcançar a mesma altura que foi abandonado num plano inclinado de subida

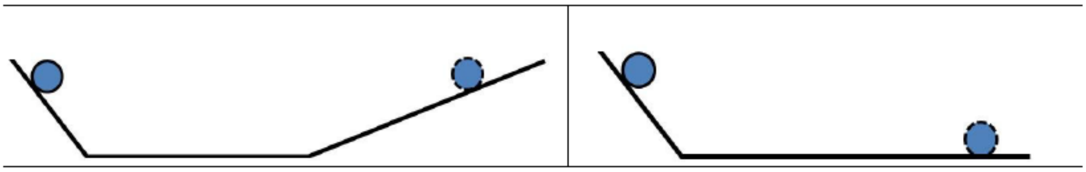


Figura 2: Galileu reduz a inclinação do plano de subida progressivamente, até que sua inclinação seja nula.

Após analisar minunciosamente os resultados obtidos em cada caso de movimento, Galileu conclui que o corpo ao chegar à base do plano inclinado de descida com uma determinada velocidade, não nula, este poderá assumir três movimentos possíveis no plano de subida. Segundo Baptista (2000, p. 274), esses movimentos são:

1- A velocidade aumenta gradativamente quando a inclinação do plano for menor do que zero.
2- Se inicialmente o corpo tiver uma velocidade diferente de zero, esta diminui gradativamente quando a inclinação do plano for maior que zero.
3- O corpo continuara seu movimento com a mesma velocidade indestrutível, com que sai do plano inclinado de descida, quando a inclinação do plano de descida se tornar nula. Este ira conservar o seu estado de movimento, a menos que uma ação obrigue a mudança do seu estado.

As conclusões retiradas destas experiências marcam a derrubada dos paradigmas da física aristotélica, pois nestas fora identificada pela primeira vez a existência do movimento de um corpo sem a ação contínua de um motor, uma vez que o corpo ao prosseguir seu movimento no plano horizontal, não há uma ação resultante atuando sobre este que causasse o movimento, algo inconcebível na física aristotélica. Como destaca Campos em seu artigo, *A complexidade do movimento local na Física aristotélica*, exemplificando o lançamento de uma pedra na visão aristotélica.

> “[…] Quando a mesma pedra é lançada para cima através de um esforço, mantém-se em movimento ascendente, para e inicia um movimento descendente procurando seu lugar natural. Enquanto a pedra estiver em movimento ascendente, cessado o contato inicial, deve existir alguma outra causa – movedor – que mantenha seu movimento, [..]” Campos (2012, p. 3601-7).

Entretanto, Galileu contrariando seus próprios resultados experimentais, não formulou o princípio geral da inercia e buscou a explicação do movimento contínuo, no qual não se observa a influência de nenhuma ação motora, no movimento circular uniforme. Indagando-se: “o que é o horizonte, se não uma porção limitada da circunferência da Terra?” Então Galileu pode achar a sua resposta para explicar este movimento, ao concluir que: “O movimento no horizonte nada mais é do que um movimento no qual, o corpo mantinha sua distância constante do centro de gravidade da terra” e “unicamente o movimento circular pode ser uniforme e perpetuamente mantido, ao contrário do retilíneo que naturalmente não é perpétuo” (BAPTISTA, 2000). Galileu não pode conceber em sua vida, a existência de um movimento uniforme e perpétuo que não fosse o movimento circular, nunca chegando a fórmula o princípio da inércia retilínea. Isto é:

> “O movimento inercial que Galileu deixou implícito em suas obras falava da inércia do movimento circular, mas ele nunca estabeleceu uma inércia que tratasse do movimento retilíneo uniforme, como o fez Gassendi e posteriormente Newton” Rovaris (2007, pg. 83).

Apesar de não ter formulado o princípio da inercia retilínea, Galileu contribuiu de maneira imensurável para o desenvolvimento da física, através da sua metodologia para descoberta de novas teorias físicas.

> “A principal contribuição de Galileu ao desenvolvimento da Física talvez tenha sido idealizar experiências imaginárias em que os postulados e princípios delas derivados só serão considerados como verdadeiros quando as suas consequências futuras corresponderem e concordarem perfeitamente com os resultados experimentais” Brito (1985, p. 63).

Porto e Porto (2008, p. 4601-5), também afirma que: “O uso dos instrumentos desenvolvidos por Galileu deu ao empirismo uma nova dimensão e acabou por golpear de forma definitiva a física aristotélica”.

2.1.2. Pierre Gassendi

O francês, Pierre Gassendi (1592-1655), foi o pioneiro ao afirmar explicitamente e pela primeira vez o Princípio da Inércia, em sua obra ***De motu impresso a motore translato**,* publicada no ano de 1642 (BAPTISTA, 2000). Neste trabalho, Gessendi, discute o experimento de uma pedra sendo lançado do alto do mastro de um navio, como base para promover a dissociação do peso, como características dos objetos e o associa à atração que a Terra exerce sobre os objetos.

> "[...] A inércia entendida e definida por ele é o princípio do movimento eterno em linha reta. Isto é, se um objeto for atirado por alguém para longe do centro da Terra (que é o que atrai os corpos) se moverá eternamente em linha reta, já que aí não ocorrerá o movimento perpendicular que este planeta faz ocorrer. Gassendi promoveu assim a eliminação do peso dos objetos, ou seja, o peso não está no objeto, mas sim na atração que a Terra exerce sobre ele." Rovaris (2007, pg. 83).

Após eliminar o peso no objeto, Gassendi, define uma característica primordial dessa atração, "a atração é uma força externa, que como as outras forças, não poderia agir à distância, isto é, as coisas deveriam *estar* na Terra para sofrer a ação da gravidade terrestre" (ROVARIS, 2007, p. 83). Formulando então, seu entendimento da inercia, no qual diz, que:

> "Um corpo que se mova por si mesmo no vácuo, não sendo afetado pela gravidade e, tendo em vista que este espaço não tem ação nenhuma sobre os corpos, contrariamente ao que acontece no espaço de Aristóteles e de seus vestígios no espaço de Galileu, o corpo continuará sempre em linha reta em seu movimento uniforme" Koyré (1986 apud BAPTISTA, 2000, p. 275).

Observa-se uma forma quase definida do princípio da inercia no qual, para Gassendi, um corpo tende a conservar infinitamente o seu estado de movimento retilíneo com velocidade constante e não sendo possível este mudar seu estado, sem que sofra a ação de uma força externa. Segundo Rovaris (2007):

> "A conclusão de Gassendi foi de que, em si, qualquer movimento deveria ser retilíneo e deveria se conservar eternamente. O movimento, para continuar, não precisa que uma *força* ou *impetus* seja impressa ao móvel, precisa somente do movimento que o móvel possui enquanto está em conjunto que lhe é impresso. O movimento, assim, conserva-se sozinho. [...]" Rovaris (2007, pg. 88).

2.1.3 Renè Descartes

Renè Descartes (1590-1650), considerava o primordial na existência da matéria sua extensão (dimensões) e movimento, e qualquer determinação qualitativa (cor, sabor, etc.), era mera impressão subjetiva, determinada pelos nossos sentidos (PORTO e PORTO, 2008, p. 4601-8). Baptista (2000) também afirma, à concepção de Descartes sobre a matéria e sobre ela está concebida sua visão do universo:

> “Para Descartes o que é essencial na matéria é extensão e movimento, e, consequentemente, o universo, que é uma entidade extensa e infinita e, por força deste postulado, e uma entidade plena, não vazia” (BAPTISTA, 2000, p. 275).

Seguindo esta ideia de pensamento, Descartes, postula suas leis de movimento e espaço. Segundo Baptista (2000), essas leis são:

> “Deus quando criou o universo de extensão infinita lhe conferiu também um movimento. A quantidade de movimento total criada é imutável, não podendo aumentar nem diminuir; porém, localmente, o movimento de um corpo pode ser alterado pela troca com outro e enquanto um deles perde movimento, o outro ganha, a mesma quantidade” Baptista (2000, p. 275).

e continua com a segunda lei:

> “Cada corpo permanece em seu estado de movimento retilíneo - que é a forma geométrica mais simples, criada por Deus ao dar partida ao movimento geral - permanecendo neste estado até que o corpo seja afetado por alguma força externa;” Baptista (2000, p. 275).

É perceptível em Descartes a ideia da conservação de movimento total de um sistema, sendo esta uma das leis mais importantes e fundamentais do universo, visto que ele era adepto a visão da imutabilidade divina. Ou seja, Deus conferiu movimento ao universo, então este movimento nunca poderá se desintegrar ou aumentar.

Descartes, na sua visão cartesiana, concebia o mundo como sendo geometrizado e o movimento seria uma translação geométrica neste mundo cartesiano, e o tempo “para ele seria uma dimensão geométrica de mesma natureza que o espaço” (BAPTISTA, 2000, p.275). Repousando-se neste mundo cartesiano, idealizado por Descartes, as bases da formulação e da descrição das leis da mecânica moderna. Descartes conclui que o universo possuía origem mecânica e que o seu movimento natural era retilíneo e não curvo, como afirmava Galileu, portanto qualquer mudança do seu movimento natural era resultado de colisões com outros corpos (PORTO e PORTO, 2009, p. 4601-6).

É importante destacar, uma impossibilidade cosmológica na ideia de inercia de Descarte, pois este considera o vácuo inexistente, entretanto um corpo só se encontrara em movimento retilíneo e uniforme no vácuo. Como destaca Baptista (2000, p. 275):

> “[…] contraditoriamente Descartes, na sua concepção cosmológica crie uma impossibilidade, uma vez que o movimento retilíneo e uniforme só existe no vácuo. E importante lembrar que para Descartes o vácuo não existe!” Baptista (2000, p. 275).

2.1.4 Issac Newton e a massa inercial

A interessante discussão sobre o conceito de inercia tomou forma tangível em Newton, apoiado-se sobre as ideias de seus predecessores, que deixaram uma definição quase que finalizada da inercia. Newton, publica a versão final da inércia, ensinada até hoje, em sua obra Mathematical Principles of Natural Philosophy and his System of The World (*Princípios Matemático da Filosofia Natural e seu sistema do mundo*), publicada em 1687 e dividida em três volumes, no qual Newton constrói as bases da dinâmica. Definido assim, em seu texto, os domínios de validade formal e matemático, no qual as leis que regem o movimento são validas.

Newton inicia o primeiro volume do seu primeiro livro, dessa obra que representa um marco na física, definindo a quantidade de matéria como: “*A quantidade de matéria é a medida da mesma, resultante conjuntamente da sua densidade e volume”* (NEWTON, 1729, p. 1). E segue, na sua definição II, definindo a quantidade de movimento (ou momento) de um corpo, dependendo essa de sua massa e velocidade: “A quantidade de movimento é a medida da mesma, resultante da velocidade e quantidade de matéria conjuntamente” (NEWTON, 1729, p. 1).

Após essas definições iniciais sobre a massa e quantidade de movimento, é possível perceber que, na sua definição III do seu primeiro volume, reside a verdadeira natureza da massa. Onde, ele disserta sobre a propriedade resistiva da matéria à mudança no seu estado de movimento: “A insita, ou força inata da matéria, é um poder de resistir, pelo qual todo o corpo, tanto quanto dele depender, continua em seu estado atual, seja esse de repouso ou de movimento uniforme para adiante em uma linha reta.” (NEWTON, 1729, p. 2).

Neste trabalho, pela primeira vez, observamos que a massa ganha um significado claro de quantidade de matéria e caracterizada pela sua inercia, que seria uma propriedade intrínseca da mesma, que tende a preservar seu estado de movimento. Partindo das suas definições, Newton postula as suas três leis do movimento:

1° "Todo corpo continua em seu estado de repouso ou de movimento uniforme em uma linha reta, a menos que seja obrigado a mudar esse estado, por forças impressas nele" (NEWTON, 1729, p. 13).

2° "A mudança de movimento é proporcional à força motriz impressionado; e é feita na direção em que essa força é impressa." (NEWTON, 1729, p. 13).

Esta força que aparece nessa lei, foi definida na formulação de Euler, como o produto da massa e da aceleração, $F=ma$ (JAMMES, 2000, p. 5).

3° "Para cada ação há sempre uma reação igual e oposta, ou seja, as ações mútuas de dois corpos um sobre o outro são sempre iguais e dirigidas a direções contrárias." (NEWTON, 1729, p. 13).

Portanto, podemos concluir um conceito bem claro para a massa em Newton, consistindo esta massa, que é apresentada na 2º lei de Newton, como a medida da tendência de um corpo em conservar o seu movimento natural (retilíneo e uniforme), esta tendência de preservar esse estado é conotada por inercia, como subscrito na 1° lei, e é operacionalizada pelo quociente da força pela aceleração, adquirida como consequência desta ação. Em termos matemáticos escreve-se que

$$m=\frac{F}{a}.....(1)$$

e assim se alcança a interpretação de massa como medida de inércia.

2.2. Massa inercial e massa gravitacional

Neste cenário clássico, onde foi construído o conceito de inércia e surge à definição de massa inercial, grandeza caracterizada como a propriedade que estabelece a razão entre a força resultante exercida e a aceleração resultante, ou seja, que tende a preservar o estado de movimento do corpo, seja este retilíneo uniforme ou de repouso, como foi discutido até este momento; aparece também à massa gravitacional, grandeza responsável pelas interações gravitacionais, portanto, apresentando-se com uma interpretação conceitual muito distinta da massa inercial. Em linguagem mais atual, sabe-se que a massa gravitacional é a carga que origina a interação gravitacional (assim como a carga elétrica é a fonte da força elétrica, e assim por diante para cada uma das forças fundamentais). Experimentalmente, verifica-se que as quantidades de massa inercial e massa gravitacional de um corpo, possuem o mesmo valor. Sendo possível de uma maneira simples constatar esta igualdade ao analisarmos um corpo em queda livre no interior de um campo gravitacional então, neste caso, à única força observada atuando no corpo é a força peso. Portanto, podemos escrever que a força resultante sobre este é:

$$F=P$$

$$m_g g=m_i a$$

Como a única aceleração no corpo é da gravidade, $g=a$, conclui-se que:

$$m_g=m_i$$

A própria natureza, por meio da manifestação de seus fenômenos, nos mostra que essa igualdade é verdadeira, se esta não fosse verdadeira, corpos com maior massa inercial chegariam ao solo mais rapidamente que corpos com menor massa inercial, ao serem abandonados em condições iguais (de uma mesma altura e no mesmo instante no interior de um mesmo campo gravitacional). Embora, esta igualdade entre a massa inercial e gravitacional ser confirmada experimentalmente e atualmente seja considerada uma questão trivial na física, sua explicação foi um dos maiores mistérios da mecânica newtoniana, permanecendo sem explicação por mais de um século e foi considerada uma mera coincidência (CASTELLANI, 2001, p. 358-359).

Atualmente é relativamente fácil, a compreensão do porquê da igualdade entre a massa inercial e gravitacional não ser obvia na mecânica newtoniana. Uma vez que, ao definir sua segunda lei, Newton, define uma força instantânea (intervalo de tempo finitamente pequeno) que atua sobre um corpo, não permanecendo neste após ação de alterar seu estado de movimento. Como ele destaca em seu principia, ao defini-la em sua definição IV: “Uma força impressa, é uma ação exercida sobre um corpo para mudar seu estado, seja de repouso ou de movimento uniforme em uma linha reta” (NEWTON, 1729, p. 2). Em seguida faz o seguinte comentário:

> “Esta força consiste apenas na ação, e não permanece no corpo quando a ação cessa. Um corpo mantém seu novo estado de movimento adquirido, apenas por sua inércia. [...].” (NEWTON, 1729, p. 2).

Entretanto, quando analisamos um corpo em queda, a força peso atuará em todos instantes desse movimento, acelerando o corpo até este movimento cesse, portanto, até a chegada do corpo ao solo. Além do fato, da massa que aparece na força peso, não se apresenta mais como uma característica do corpo de preservar seu estado de movimento natural, já que um corpo abandonado em um campo gravitacional, estará sempre em queda.

Passando-se mais de dois séculos desde a formulação das leis da mecânica newtoniana, somente no início do século XX com Einstein, foi possível compreender o verdadeiro significado escondido desta coincidente igualdade, que até então era um mero acaso na construção da física, no qual se encontrava a chave para a compreensão profunda da relação entre inercia e gravitação. Em 1916, Einstein publica sua Teoria da Relatividade Geral, que possui um de seus alicerces, fundamentado sobre a igualdade entre a massa inercial e gravitacional. Tal igualdade encontrada subscrita no Principio da Equivalência:

> "Num pequeno laboratório em queda livre num campo gravitacional, as leis físicas são as mesmas que num referencial inercial na ausência do campo gravitacional"; ou também pode ser escrita como, "Um referencial acelerado é idêntico a um referencial em repouso em um campo gravitacional" Castellanni (2001, p. 358-359).

Portanto, a massa gravitacional e a massa inercial, são apenas nomenclaturas distintas de uma mesma grandeza, onde sua distinção única encontra-se no nosso modo de concebê-la, como sendo massa gravitacional ou inercial. Entretanto, independentemente de como esta massa é chamada, seja gravitacional ou inercial, ambas irão se referir a mesma propriedade do corpo e que define sua inercia.

3. "MASSA RELATIVISTA" E SUA CONSEQUÊNCIA NA RELATIVIDADE RESTRITA

Diferente do que apresenta-se na mecânica clássica a respeito massa, no qual Newton a definiu com um conceito claro de medida da inércia de um corpo, na relatividade restrita essa massa ganha diversos significados, aparecendo neste contexto, os conceitos de **massa relativística (M)** e a **massa de repouso (m)**. Tal conceito nasce de uma interpretação equivocada do quadrivetor momento-energia e para, tentar corrigir tal equívoco, neste tópico desenvolveremos a formulação físico-matemática deste quadrivetor e ponderaremos acerca das justificativas que levam vários autores a introduzirem a famosa massa relativista.

3.1 O nascimento da Teoria da Relatividade Restrita (TRR)

A TRR tem sua síntese em 1905 quando Albert Einstein publica o seu artigo intitulado Sobre a Eletrodinâmica dos Corpos em Movimento (Zur Elektrodinamik Bewegter Korper), nos Annalen der Physik. Nesse trabalho, Einstein resolve de maneira brilhante o conflito entre as equações de Maxwell e as transformações de Galileu, gerada pela "[…] "assimetria" que a eletrodinâmica de Maxwell conduzia quando aplicada a corpos em movimento a qual em síntese aponta para a mesma dificuldade dos experimentos de movimento em relação ao éter [...]" (ARRUDA, 1996, p. 36).

A TRR é essencialmente uma reafirmação de que os fenômenos da natureza que são descritos por meio das leis da Física, são independentes do referencial adotado. Esta independência estabelece então uma das bases do espaço-tempo. Einstein, parte de dois postulados e reformula alguns conceitos, como espaço e tempo, conceitos estes dados como primários e puramente intuitivos, e deriva as transformações de Lorentz (TL) (CARUSO, 2006, p. 191-192). Entretanto, diferentemente de Lorentz, Einstein se desvincula da ideia de éter, que ainda era possível ser identificada em Lorentz.

3.2 Os postulados da teoria da relatividade e as transformações de Lorentz

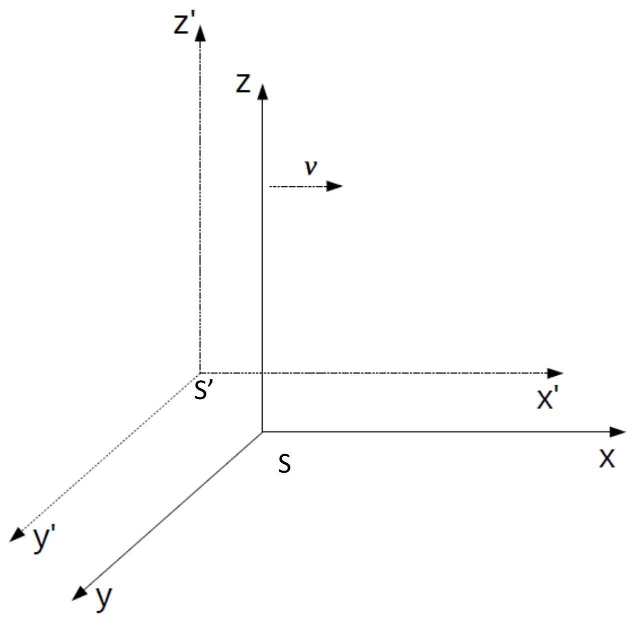
Os dois postulados básicos da TRR são:

- *Princípio da Relatividade*: As leis Físicas são as mesmas em todos os referências inerciais.
- *Princípio da Invariância da Velocidade da Luz*: A velocidade de propagação da luz no vácuo tem o mesmo valor, dado por c, para todos os referências inerciais, independente do estado de movimento do emissor e do observador.

Vale ressaltar que, na época da formulação deste postulado, Maxwell, já havia mostrado que $c=\frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}$. Entretanto, admitia-se que este valor de c variava, segundo a velocidade relativa do observador em relação ao éter. Atualmente, μ_0 e

ε_0 são considerados constantes universais do magnetismo e da eletricidade no vácuo.

Com a força do primeiro postulado, as transformações de Galileu que faziam a ligação entre referenciais inerciais na mecânica clássica e que considera o tempo uma quantidade invariante, encontra o limite do seu domínio de validade na TRR. Passando esta relação a ser regida por uma lei de transformação mais geral, as TL. Analisemos estas transformações no caso particular de uma partícula localizada num referencial S e este referencial está em movimento, unidimensional e com velocidade constante " $\vec{v}=v\hat{i}$ " (ou seja, paralelo ao eixo x de um sistema de coordenadas cartesiano), em relação a um referencial S'. Então, estes referenciais, relacionam suas medidas de tempo e posição da partícula, via as TL. Como se segue abaixo:



$$x'=\gamma(x-vt)\ldots\ldots(2)$$

$$y'=y\ldots..(3)$$

$$z'=z\ldots\ldots(4)$$

$$t'=\gamma\left(t-\frac{v}{c^2}x\right)\ldots\ldots..(5)$$

Onde o termo γ que aparece nas transformações, é denominado de fator adimensional de Lorentz, dado por:

$$\gamma=\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}....(6)$$

Vejamos agora, de maneira explicita, como este dois postulados se relacionam com as TL. Para tal, consideremos um pulso luminoso sendo emitido da origem de um referencial S qualquer e que deslocando-se com velocidade $\vec{v}=v\hat{i}$, em relação a um segundo referencial S' e momento da emissão do pulso $t=t'=0$. Logo, pelo segundo postulado, tanto S como S', irão observar o pulso se deslocar com velocidade c ao atingir um ponto (x,y, z) no instante t em S e S' ira descrever esse mesmo evento no ponto (x', y', z') no instante t'. Vemos como ocorre a descrição desse evento em S e S', de acordo com equações abaixo, respectivamente:

$$(ct)^2=(x^2+y^2+z^2)$$
$$(ct)^2-(x^2+y^2+z^2)=0......(7)$$

e

$$(ct')^2=(x'^2+y'^2+z'^2)$$
$$(ct')^2-(x'^2+y'^2+z'^2)=0....(8)$$

Com a implicação do primeiro postulado da TRR, de que o espaço-tempo homogêneo e isotrópico, a relação entre esses dois conjuntos de coordenadas medidos por S e S', são lineares (JACKSON, 1983,p. 389). Em que, o coeficiente linear que os relacionam, é igual a 1, para qualquer velocidade relativa. Portanto, podemos obter a relação abaixo.

$$(ct)^2-(x^2+y^2+z^2)=(ct')^2-(x'^2+y'^2+z'^2)....(9)$$

Por simplicidade, consideremos o pulso emitido na direção x do sistema de coordenadas cartesiano fixado no referencial S e em x’, no referencial S’.

$$(ct)^2-(x^2)=(ct')^2-(x'^2)....(10)$$

Busquemos uma relação que respeite a eq. (10) e relacione x, t e x', t'. Para isso, iremos supor que as coordenadas x e ct, sejam descritas e se relacionem com t' e x', por meio de funções hiperbólicas.

$$x = x' \cosh(a) + ct' \sinh(a) \ldots\ldots (11)$$
$$ct = x' \sinh(a) + ct' \cosh(a) \ldots. (12)$$

Estas funções respeitam a relação (10). Como podemos facilmente verificar abaixo, substituindo (11) e (12) em (10). (Lembrando que $\cosh^2(a) - \sinh^2(a) = 1$) .

$$(ct)^2 - (x^2) = (x' \sinh(a) + ct' \cosh(a))^2 - (x' \cosh(a) + ct' \sinh(a))^2$$
$$(ct)^2 - (x^2) = (x' \sinh(a))^2 + (ct' \cosh(a))^2 + 2x' ct' \sinh(a) \cosh(a) - (x' \cosh(a))^2 - (ct' \sinh(a))^2 - 2x' ct' \sinh(a$$
$$(ct)^2 - (x^2) = (x')^2 (\sinh^2(a) - \cosh^2(a)) + (ct')^2 (\cosh^2(a) - \sinh^2(a))$$

Obtemos

$$(ct)^2 - (x^2) = (ct')^2 - (x'^2)$$

Visto que verificamos a igualdade em (10), podemos utilizá-la para o desenvolvimento que se segue. Agora, supomos que S observe a origem de S', logo temos de (11) e (12).

$$x = ct' \sinh(a)$$
$$ct = ct' \cosh(a)$$

Com isso temos que $\tanh(a)$ é dada por:

$$\tanh(a) = \frac{x}{ct} \ldots\ldots (13)$$

Pela nossa construção do movimento, $v = \frac{x}{t}$. Logo resulta de (13) que

$$\tanh(a) = \frac{v}{c} \ldots\ldots (14)$$

Utilizando a eq. (14) elevada ao seu quadrado e a relação $\cosh^2(a) - \sinh^2(a) = 1$, temos:

$$\tanh^2(a) = \frac{v^2}{c^2}$$

$$senh^2(a)=\left(\frac{v^2}{c^2}\right)\cosh^2(a)$$

$$senh^2(a)=\frac{v^2}{c^2}\left(1-senh^2(a)\right)$$

$$senh^2(a)-\left(\frac{v^2}{c^2}\right)senh^2(a)=\frac{v^2}{c^2}$$

$$senh(a)=\frac{\frac{v}{c}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=\gamma\frac{v}{c}....(15)$$

Usando o resultado (15) e o (14), obtemos diretamente o valor do cosseno hiperbólico.

$$\cosh(a)=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=\gamma....(16)$$

Aplicando (15) e (16), em (11) e (12), obtemos:

$$x=\gamma(x'+vt').....(17)$$

$$ct=\gamma\left(x'\frac{v}{c}+ct'\right)....(18)$$

Assim deduzimos as TL inversas das escritas em (2) e (5). Para obtermos as mesmas transformações de (2) e (5), bastávamos considerar que S' observa um evento na origem de S, em (11), como feito por Rocha (2013) em seu artigo, *Transformações de Galileu e de Lorentz: um estudo via teoria de grupo*. Sendo obtido, por este procedimento as transformações.

$$ct'=\gamma\left(ct-x\frac{v}{c}\right)....(19)$$

$$x'=\gamma(x-vt)....(20)$$

$$y'=y....(21)$$

$$z'=z....(22)$$

Vemos como o postulado de Einstein se relaciona com as TL, ao obtermos as TL partindo da validade dos postulados de Einstein. Este é um resultado muito interessante, pois toda as construções da mecânica, na TRR, desenvolve-se partindo destas transformações. Como será constatado nos parágrafos que se seguem.

Percebe-se claramente, que as TL misturam coordenadas espaciais e temporais, logo se torna muito útil para as deduções que se seguem, trabalharmos com as transformações de modo que possuam a mesma unidade e a mesma forma. Para tanto, façamos alterações na forma como escrevemos nossas transformações de espaço e tempo, fazendo as seguintes mudanças de escrita.

$$x^0 \equiv ct \quad ; \quad \beta \equiv \frac{v}{c} \quad ; \quad x^1 = x \quad ; \quad x^2 = y \quad ; \quad x^3 = z \quad \ldots\ldots..(23)$$

- Substituindo os termos de (23) na equação (19):

$$\frac{x'^0}{c} = \gamma\left(\frac{x^0}{c} - \frac{v}{c^2}x^1\right) = \frac{\gamma}{c}\left(x^0 - \frac{v}{c}x^1\right) = \frac{\gamma}{c}\left(x^0 - \beta x^1\right)$$

$$\frac{x'^0}{c} = \frac{\gamma}{c}\left(x^0 - \beta x^1\right)$$

$$x'^0 = \gamma\left(x^0 - \beta x^1\right)$$

- Substituindo os termos de (23) na equação (20):

$$x'^1 = \frac{x^1 - v\frac{x^0}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{x^1 - \beta x^0}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

$$x'^1 = \gamma\left(x^1 - \beta x^0\right)$$

- Substituindo os termos de (23) nas equações (21) e (22):

$$x'^2 = x^2$$
$$x'^3 = x^3$$

Temos em mãos, agora quatro componentes na forma denominada de estrutura *espaço-tempo*. Estrutura essa, que irá ser utilizada no desenvolvimento da quadrivelocidade e consequentemente do quadrivetor momento-energia relativístico.

$$x'^0=\gamma\left(x^0-\beta x^1\right)\ldots coordenada\ temporal$$

$$\left.\begin{array}{l} x'^1=\gamma\left(x^1-\beta x^0\right) \\ x'^2=x^2 \\ x'^3=x^3 \end{array}\right\} \text{coordenadas espaciais} \qquad \ldots\ldots\ (24)$$

Para o leitor que talvez esteja iniciando seu estudo no domínio relativista e ainda não está familiarizado com os quadrivetores, definamos um ***quadrivetor*** como qualquer conjunto de quatro componentes que se transforma da mesma maneira que (x^0, x^1, x^2, x^3) sob as TL (GRIFFTHS, 2011, p. 349). Escrevamos, de posse das componentes temporal e espacial, nosso **quadrivetor espaço-tempo** de um referencial inercial S**:**

$$x^u=\left(\mathrm{x}^0,\mathrm{x}^1,x^2,x^3\right)\ldots\ldots..(25)$$

Na relatividade, procuramos por quantidades que se comportem como quadrivetores, visto que a isotropia e homogeneidade do espaço é mantida, por meio destes. Nesse cenário, procura-se colocar as quantidades físicas em termos dos quadrivetores com o intuito de verificar invariantes como, por exemplo, a quantidade

$$S^2=(ct)^2-\left(x^2+y^2+z^2\right)=(ct')^2-\left(x'^2+y'^2+z'^2\right)=S'^{2\ldots}(26)$$

Vale ressaltar que, na mecânica newtoniana na qual os tempos são iguais (*t = t')*, a igualdade se reduz meramente ao tamanho ou módulo dos vetores espaciais

$$S=\left(x^2+y^2+z^2\right)=\left(x'^2+y'^2+z'^2\right)=S'$$

Definamos assim um evento no espaço de 4 dimensões como um ponto no espaço-tempo.

3. 3 As transformações de velocidade de Einstein e a quadrivelocidade

De posse das nossas expressões de espaço e tempo, procuramos naturalmente definir a velocidade e, portanto, somos conduzidos de maneira intuitivamente a fazê-lo através de $\frac{dx^u}{dt}$, onde a posição e o tempo são medidos em um mesmo referencial. Entretanto, por este caminho, obtemos quantidades que não se comportam como um quadrivetor, pois perdemos a componente temporal do quadrivetor no processo, devido a uma consequência direta de nosso dt não ser um objeto escalar na relatividade. Como é ilustrado no desenvolvimento a seguir:

- Utilizando, as equações (19), (20), (21) e (22), e misturando as coordenadas espaciais com a temporal.

$$V'_x = \frac{dx}{dt} = \frac{V_x - v}{\left(1 - \frac{V_x v}{c^2}\right)} \ldots.(27)$$

$$V'_y = \frac{dy}{dt} = \frac{V_y}{\left(1 - \frac{V_x v}{c^2}\right)} \ldots\ldots(28)$$

$$V'_z = \frac{dx}{dt} = \frac{V_z}{\left(1 - \frac{V_x v}{c^2}\right)} \ldots\ldots(29)$$

Estas equações, são as chamadas regras de ***transformações de velocidades de Einstein***, que relacionam velocidades medidas entre dois referenciais inerciais e claramente não se comportam como um quadrivetor. Tendo em vista, que a definição de quadrivetores nos diz: um quadrivetor é qualquer quantidade que se transforma da mesma maneira que nossas eq. (19,20,21,22) sobre uma transformação de Lorentz, logo:

$$V'_x = \frac{dx}{dt} = \frac{V_x - v}{\left(1 - \frac{V_x . v}{c^2}\right)} \neq \gamma\left(V_x - vt\right)$$

$$V'_y = \frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dt}} = \frac{V_y}{\left(1 - \frac{V_y v}{c^2}\right)} \neq V_y$$

$$V'_z = \frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{dt}} = \frac{V_z}{\left(1 - \frac{V_z v}{c^2}\right)} \neq V_z$$

Uma consequência direta desta definição de velocidade, é a violação da conservação do momento em qualquer referencial inercial. Para entendermos como ocorre tal violação, analisemos o caso clássico, da colisão entre duas partículas de massa m_1 e m_2 . Pela conservação do momento temos:

$$p_1^i + p_2^i = p_1^f + p_2^f$$

$$m_1 v_1^i + m_2 v_2^i = m_1 v_1^f + m_2 v_2^f \ldots.(30)$$

Observando essa colisão de um referencial S', que se movem com velocidade "VRel", em relação ao primeiro referencial. Temos pelas transformações de Galileu, que:

$$v' = v - V_{rel} \ldots.(31)$$

Substituindo (31) em (30), temos:

$$m_1(v'^i_1 + V_{rel}) + m_2(v'^i_2 + V_{rel}) = m_1(v'^f_1 + V_{rel}) + m_2(v'^f_2 + V_{rel})$$

$$m_1 v'^i_1 + m_2 v'^i_2 + (m_1 + m_2) V_{rel} = m_1 v'^f_1 + m_2 v'^f_2 + (m_1 + m_2) V_{rel}$$

$$m_1 v'^i_1 + m_2 v'^i_2 = m_1 v'^f_1 + m_2 v'^f_2 \ldots..(32)$$

Agora substituindo em (30), a transformações de velocidade de Einstein temos:

$$m_1 \frac{V + (v'^i_1)}{\left(1 + \frac{V(v'^i_1)}{c^2}\right)} + m_2 \frac{V + (v'^f_2)}{\left(1 + \frac{V(v'^i_2)}{c^2}\right)} = m_1 \frac{V + (v'^f_1)}{\left(1 + \frac{V(v'^f_1)}{c^2}\right)} + m_2 \frac{V + (v'^f_2)}{\left(1 + \frac{V(v'^f_2)}{c^2}\right)} \ldots.(33)$$

Vemos claramente que o momento não se conserva em (33), quando tentarmos definir a velocidade como $\frac{\mathrm{dx}^u}{\mathrm{dt}}$ e obtemos as transformações de velocidades de Einstein.

Ao passo, que na mecânica clássica, no qual o tempo é um invariante para qualquer referencial, bastávamos misturarmos as quantidades espaciais e temporal, medidas em um mesmo referencial inercial, para obtermos nosso vetor velocidade e consequentemente a conservação do momento, visto que:

> “A conservação do momento clássico está relacionada com a simetria e homogeneidade do espaço (simetria translacional e rotacional), que por sua vez se relaciona com as propriedades de transformação dos vetores no espaço euclidiano. Ou seja, a conservação do momento clássico é uma consequência de a massa ser um escalar e a velocidade ser um vetor.” Baldiotti (2014, pg. 88).

Entretanto, na relatividade em que procuramos quantidades que se comportem como quadrivetores, à definição $\frac{\mathrm{dx}^{u}}{\mathrm{dt}}$, que é obtida de maneira clássica, como vista, se torna insuficiente. Necessitamos assim, reformular nossa definição classicista de velocidades.

> “Então, na RR devemos procurar por quantidades que se comportem como 4-vetores. Como veremos, esta não é uma tarefa tão simples, pois a mistura das coordenadas espaciais e temporais torna a nossa intuição quase sempre insuficiente para esta procura.” Baldiotti (2014, p. 80)

Nessa busca da reformulação da velocidade clássica, buscamos uma medida de tempo invariante, que seja o mesmo em todos os referenciais inerciais. Para tal, consideremos o caso de dois referenciais, S e S', que descolocam-se com velocidade relativa “v” entre si, na orientação paralela x e x' dos seus sistemas de coordenadas. Consideremos também, que uma partícula esteja se movimentando em relação ao referencial S e encontra-se instantaneamente, em estado de repouso em relação ao referencial S'. Nos referências S e S', esse mesmo movimento é descrito, respectivamente, como:

$$dS^2=(c\,dt)^2-(d\vec{x})^2=c^2dt^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right).....(34)$$

$$dS'^2=c^2d\tau^2....(35)$$

Igualando (34) e (35), como visto em (26).

$$dt^2c^2\left(1-\frac{\vec{v}^2}{c^2}\right)=c^2d\tau^2$$

$$dt^2\left(1-\frac{\vec{v}^2}{c^2}\right)=d\tau^2$$

$$d\tau=\sqrt{1-\frac{\vec{v}^2}{c^2}}dt......(36)$$

Em (36) temos um objeto invariante, chamado de ***intervalo de tempo próprio***. Pois, como é mostrado em (35), $d\tau$ é um escalar, visto que c é a velocidade da luz no vácuo e dS' são objetos escalares (LEMOS, 2007, p. 195).

De posse deste nosso objeto invariante, $d\tau$, voltemos a definir nossa velocidade, de modo que agora possa definir uma velocidade que se comporte como um quadrivetor. Fazemos isso, através da derivada do quadrivetor espaço-tempo, em relação ao intervalo de tempo próprio, $\frac{\mathrm{dx}^u}{\mathrm{d\tau}}$. Como se desenvolve abaixo:

$$n^u=\frac{\mathrm{dx}^u}{\mathrm{d\tau}}$$

$$n^u=\left(\frac{\mathrm{dx}^0}{\mathrm{d}\tau},\frac{\mathrm{dx}^1}{\mathrm{d}\tau}\right)$$

$$n^u=(\mathrm{n}^0,\mathrm{n}^1)$$

$$n^u\equiv\left(\frac{c}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},\frac{v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right).......(37)$$

De maneira mais geral, onde o movimento relativo não está confinado a uma única dimensão, temos:

$$n^u\equiv(\gamma c,\gamma\vec{v}).....(38)$$

Esta quantidade, mostrada em (38), é denominada de ***quadrivelocidade***. Sendo definida, como uma grandeza híbrida, originada da composição entre quantidades medidas por um ***referencial próprio,*** referencial esse no qual a partícula encontra-se instantaneamente em repouso, e um ***não próprio***, no qual a partícula encontra-se em estado de movimento retilíneo uniforme.

Façamos as transformações de quadrivelocidade entre dois referenciais inerciais S e S'. Usemos então o quadrivetor x'^{μ} (obtido na 24) e façamos sua derivada a em relação à $d\tau$, componente a componente.

- Derivando a componente de índice 0 em relação à $d\tau$.

$$\frac{dx'^0}{d\tau}=\gamma\left(\frac{dx^0}{d\tau}-\beta\frac{x^1}{d\tau}\right)$$

$$n'^0=\gamma\left(\frac{dx^0}{dt}\frac{dt}{d\tau}-\beta\frac{dx^1}{dt}\frac{dt}{d\tau}\right)$$

De (36) sabemos que, $\frac{dt}{d\tau}=\gamma$ e usando (23) e (37), na equação acima. Temos:

$$n'^0=\gamma\left(\frac{c}{\sqrt{1-\frac{v_x{}^2}{c^2}}}-\beta\frac{v_x}{\sqrt{1-\frac{v_x{}^2}{c^2}}}\right)$$

$$n'^0=\gamma\left(n^0-\beta n^1\right).......(39)$$

- Analogamente a derivada feita na componente de índice 0, derivamos a componente de índice 1:

$$\frac{dx'^1}{d\tau}=\gamma\left(\frac{dx^1}{d\tau}-\beta\frac{x^0}{d\tau}\right)$$

$$n'^1=\gamma\left(\frac{dx^1}{dt}\frac{dt}{d\tau}-\beta\frac{dx^0}{dt}\frac{dt}{d\tau}\right)$$

$$n'^1=\gamma\left(\frac{v_x}{\sqrt{1-\frac{v_x{}^2}{c^2}}}-\beta\frac{c}{\sqrt{1-\frac{v_x{}^2}{c^2}}}\right)$$

$$n'^1=\gamma\left(n^1-\beta n^0\right)......(40)$$

- Da mesma forma encontremos as componestes de índice 2 e 3.

$$\frac{dx'^2}{d\tau}=\frac{dx^2}{d\tau}$$

$$n'^2=\frac{dx^2}{dt}\frac{dt}{d\tau}$$

$$n'^2=\frac{v_y}{\sqrt{1-\frac{v_y{}^2}{c^2}}}$$

$$n'^2=n^2.....(41)$$

$$\frac{dx'^3}{d\tau}=\frac{dx^3}{d\tau}$$

$$n'^3=\frac{dx^3}{dt}\frac{dt}{d\tau}$$

$$n'^3=\frac{v_z}{\sqrt{1-\frac{v_z^{\,2}}{c^{\,2}}}}$$

$$n'^3=n^3.....(42)$$

Temos portanto de (39), (40), (41) e (42), uma regra de transformação da quadrivelocidade entre dois referenciais S e S'.

$$\begin{aligned} n'^0 &= \gamma\left(n^0-\beta n^1\right) \\ n'^1 &= \gamma\left(n^1-\beta n^0\right) \\ n'^2 &= n^2 \\ n'^3 &= n^3 \end{aligned} \qquad \text{............ (43)}$$

3.4 Momento relativista e a introdução da massa relativista

Ao passo que definimos o quadrivetor velocidade, ou quadrivelocidade, n^u e suas coordenadas, bem como sua regra de transformação entre referenciais inerciais, então por seguinte, definimos um momento relativista. Para isso, analogamente ao momento clássico em que o momento é uma mistura de uma propriedade da partícula (sua massa) com a grandeza cinemática, que é denominada de velocidade. O momento na relatividade restrita é definido pelo produto da massa pela quadrivelocidade. Multiplicando (38) pela massa (m), temos:

$$p^u=m\,n^u=m\left(n^0,n^1\right)$$

$$p^u=\left(m\,n^0,m\,n^1\right)$$

$$p^u\equiv\left(m\frac{c}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},m\frac{v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right)$$

$$p^\mu=\left(p^0,p\right)....(44)$$

No qual, em (44), p é a coordenada espacial e p^0 a coordenada temporal deste quadrivetor-momento. Nesta definição de momento, reside a grande confusão ao associarmos o fator de Lorentz a massa e denominá-la de massa relativística.

Seja por um apego histórico, ou não, diversas são as justificativas por fazê-lo. Elenquemos algumas mais utilizadas por diversos autores de obras em diversos níveis:

A) Ao não introduzirmos o termo massa relativista e não a considerarmos como a massa da partícula, que variando com a velocidade, implica numa violação direta da lei da conservação do momento linear.

B) O aumento de inercia introduzido pela massa relativista vem a explicar, o fenômeno de partículas aceleradas sobre uma força constante, que encontram seu limite de velocidade em “c”.

Com certeza, em algum momento da vida acadêmica, diversos alunos já ouviram uma destas justificativas, ou todas, e as disseminaram para seus colegas e alunos. Portanto, elucidemos a seguir, as inconsistências de cada uma destas justificativas, no qual surge a “necessidade” de introduzirmos a “massa” relativista.

A) ***Ao não introduzirmos o termo massa relativista e não a considerarmos como a massa da partícula, que variando com a velocidade, implica numa violação direta da lei da conservação do momento linear.***

Analisemos tal justificativa através de um problema. Consideremos, para isso, uma colisão entre dois corpos de massa m_1 e m_2. Na mecânica clássica, a conservação do momento, estava ligada diretamente a conservação da massa, como vimos ao admitirmos que:

$$(m_1+m_2)V_{rel}=(m_1+m_2)V_{rel}$$

e consequentemente.

$$(m_1+m_2)=(m_1+m_2)$$

Entretanto no contexto relativista, a conservação do momento não está mais ligada a conservação de massa dos corpos. Passando agora, o momento a ser vinculado a uma lei de conservação de uma outra quantidade, que instiga diversos físicos a chamá-la de “massa relativista”. Entendamos mais claramente isso, ao utilizar a definição da parte espacial do quadrimomento, $p=mn$, e utilizando n'^1, demostrada em (40), para essa colisão. Logo a conservação do momento, num referencial S fica: (Obs.: Para não carregarmos muitos índices, consideraremos

$n^1 = n$ e consideraremos o movimento relativo entre os observadores ocorrendo em x).

$$m_1(n_1)^i + m_2(n_2)^i = m_1(n_1)^f + m_2(n_2)^f$$

Agora usando a transformação (40), para um observador vendo a colisão de um referencial S', $n = \frac{n'}{\gamma} + \beta n^0$, temos:

$$m_1\left[\frac{(n_1')^i}{\gamma} + \beta\left(n_1^0\right)^i\right] + m_2\left[\frac{(n_2')^i}{\gamma} + \beta\left(n_2^0\right)^i\right] = m_1\left[\frac{(n_1')^f}{\gamma} + \beta\left(n_1^0\right)^f\right] + m_2\left[\frac{(n_2')^f}{\gamma} + \beta\left(n_2^0\right)^f\right] ....(45)$$

Para que o momento seja conservado temos que admitir que, a quantidade abaixo seja conservada.

$$m_1(n_1^0)^i + m_2(n_2^0)^i = m_1(n_1^0)^f + m_2.(n_2^0)^f ....(46)$$

De (46) em (45), obtemos a conservação do momento.

$$m_1(n_1')^i + m_2(n_2')^i = m_1(n_1')^f + m_2(n_2')^f$$

Analisemos mais atentamente a equação (46) e apliquemos a definição de n^0.

$$m_1\frac{c}{\sqrt{1-\frac{(v_1^i)^2}{c^2}}} + m_2\frac{c}{\sqrt{1-\frac{(v_2^i)^2}{c^2}}} = m_1\frac{c}{\sqrt{1-\frac{(v_1^f)^2}{c^2}}} + m_2\frac{c}{\sqrt{1-\frac{(v_2^f)^2}{c^2}}}$$

$$\frac{m_1}{\sqrt{1-\frac{(v_1^i)^2}{c^2}}} + \frac{m_2}{\sqrt{1-\frac{(v_2^i)^2}{c^2}}} = \frac{m_1}{\sqrt{1-\frac{(v_1^f)^2}{c^2}}} + \frac{m_2}{\sqrt{1-\frac{(v_2^f)^2}{c^2}}} ....(47)$$

Aqui está, a tentação de diversos autores de introduzirem o conceito de **massa relativista**, ao denotarem a quantidade acima como $M_R = m \Big/ \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$, e chamarem m de **massa de repouso**, como sendo a massa medida no referencial onde a partícula encontra-se em repouso, e passando essa a ser denotada como

m_0 . Então, na tentativa de estender a definição de momento para o cenário relativista, se introduz a massa relativista, de modo que o momento se conserve via uma lei de conservação de massa da partícula e este passe a ser escrito analogamente a definição clássica como $\vec{p}=M_R\vec{v}$.

Este apego à definição clássica, leva a estender o mesmo significado físico da massa inercial à massa relativística e denotando está como propriedade intrínseca da partícula medidora da sua inércia. Como consequência, leva a concluir-se que à medida que a velocidade aumenta, a inércia do corpo aumenta, ou seja, tenta-se observar uma alteração estrutural da partícula à medida que esta aumenta de velocidade, como comumente é disseminado. Consequentemente, nessa concepção, uma partícula possui mais massa inercial em movimento do que em repouso. Como destaca Valadares (1993).

> "Ainda hoje muitos alunos e professores são induzidos a pensar que, quando um corpo passa de uma baixa velocidade até uma velocidade próxima da que a luz no vácuo, alguma alteração se produziu na estrutura que fez com que sua inércia aumentasse." Valadares (1993, p. 122).

Fica claro que a tentativa de estender a definição de momento clássico à relatividade, bem como a definição de massa inercial à massa relativista, confunde mais do que explica, pois esta massa não coincide com a definição clássica de massa e não é mais uma propriedade intrínseca do corpo que depende unicamente dele, agora esta grandeza depende diretamente do referencial no qual a partícula é observada e não é mais medidora da inercia do corpo, ou partícula, da mesma maneira que m . Outra inconsistência que apontamos, é o fato, que ao introduzirmos a massa relativista e escrevermos o momento, igualmente a definição clássica, como $\vec{p}=M_R\vec{v}$; violamos o postulado de Einstein do Princípio da Relatividade, no qual diz: *As leis Físicas são as mesmas em todos os referências inerciais.* Portanto, este postulado exige que as equações físicas sejam covariantes, possuindo a mesma estrutura formal em dois referenciais inerciais distintos, que se relacionem pelas TL. Logo se, uma equação for valida num referencial inercial, continuará sendo válida no outro referencial inercia. É fácil perceber que $\vec{p}=M_R\vec{v}$ não é um covariante, entretanto $\vec{p}=m\vec{n}=\gamma m\vec{v}$, como demostrado, é um covariante (VALADARES, 1993, p. 121).

Se o momento só é conservado com a conservação de $\frac{m}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$, e como discutimos, é inconsistente chamá-lo de massa relativista. Então resta a pergunta, que quantidade é essa? Respondamos esta indagação, analisando novamente (46) e usemos a notação, $m_1\left(n_1{}^0\right)^i+m_2\left(n_2{}^0\right)^i=m_1\left(n_1{}^0\right)^f+m_2\left(n_2{}^0\right)^f$.

$$m_1\left(n_1{}^0\right)^i+m_2\left(n_2{}^0\right)^i=m_1\left(n_1{}^0\right)^f+m_2\left(n_2{}^0\right)^f$$

Lembrando que $p^0=m\,n^0$, logo temos em (46) fica:

$$\left(p_1^0\right)^i+\left(p_2^0\right)^i=\left(p_1^0\right)^f+\left(p_2^0\right)^f \ldots.(48)$$

Em uma análise dimensional de p^0 , observa-se que essa quantidade é fundamentalmente a **energia relativística**, diferenciando-se desta apenas por um fator de conversão de unidade $\frac{1}{c}$.

$$E=\frac{m\,c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=p^0\,c$$

$$p^0=\frac{E}{c}\ldots..(49)$$

Podemos comprovar esta afirmativa facilmente, mediante a quadri-força $F^u=\frac{dp^u}{d\tau}$ e sua relação com a força tridimensional $\vec{F}=d\,\vec{p}/dt$, bem como a relação de ortogonalidade entre a quadri-força e o quadri-momento, $F^u\,p_u=0$.

Analogamente a física newtoniana, em que a força era escrita matematicamente como, $\vec{F}=\frac{d\,\vec{p}}{dt}$. Na dinâmica relativista, assumimos que se permaneça valida esta conexão entre a força tridimensional e o momento linear, desde que o momento passe a ser expresso matematicamente por $\vec{p}=m\,\vec{n}$.

$$\vec{F}=\frac{d\vec{p}}{dt}=\frac{d}{dt}(\gamma m\vec{v}).....(50)$$

Utilizando a definição de quadri-força e as equações (36) e (50), temos:

$$F^u=\left(\frac{dp^0}{d\tau},\frac{d\vec{p}}{d\tau}\right)$$

$$F^u=\left(F^0,\frac{1}{\sqrt{1-\frac{\vec{v}^2}{c^2}}}\frac{d\vec{p}}{dt}\right)$$

$$F^u=(F^0,\gamma\vec{F}).......(51)$$

$$F^u=(F^0,F^1)$$

Encontramos em (51) de maneira explicita a componente espacial da nossa quadri-força, entretanto, nos resta encontrar a componente temporal desta, de maneira explicita. Para tanto, utilizemos (51) e $p^u=(\gamma mc,\gamma m\vec{v})$, na condição de ortogonalidade do momento com a força, como se segue:

$$F^u p_u=0$$

$$(F^0+\gamma\vec{F})(-\gamma mc+\gamma m\vec{v})=0$$

$$-\gamma mcF^0+\gamma^2 m\vec{F}.\vec{v}=0$$

$$\gamma mcF^0=\gamma^2 m\vec{F}.\vec{v}$$

$$F^0=\frac{\gamma}{c}(\vec{F}.\vec{v})....(52)$$

Substituindo (52) em (51), possuímos de maneira explicita as componentes da quadri-força e sua relação com a força tridimensional.

$$F^u=\left(\frac{\gamma}{c}(\vec{F}.\vec{v}),\gamma\vec{F}\right)....(53)$$

Agora prestemos atenção em F^0 . De acordo com as deduções feitas até aqui, podemos obter a seguinte igualdade da parte temporal da quadri-força:

$$F^0=\frac{dp^0}{d\tau}=\frac{d}{d\tau}(\gamma mc)=\gamma\frac{d}{dt}(\gamma mc)=\frac{\gamma}{c}(\vec{F}.\vec{v})$$

Portanto

$$\gamma \frac{d}{dt}(\gamma m c) = \frac{\gamma}{c}(\vec{F}.\vec{v})$$

$$\frac{d}{dt}(\gamma m c^2) = \vec{F}.\vec{v} \ldots.(54)$$

Tendo em vista que $\vec{F}.\vec{v}$ em (54) é uma potência fornecida a uma partícula de massa “m”, por uma força $\vec{F}$. Devemos então admitir que:

$$E = \frac{m c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Logo, como foi deduzido em (49), a parte temporal do quadrivetor momento é fundamentalmente equivalente a **energia relativista** (ou energia total). Lemos (2007, p. 198) destaca: “[…] a componente temporal da equação do movimento covariante representa a lei da conservação da energia”. Sendo p^0 fundamentalmente a energia total, podemos rescrever (44), usando (49), como:

$$p^\mu = \left(\frac{E}{c}, p\right) \ldots.(55)$$

Passando este ***quadrimomento,*** agora a ser denotado de **quadrivetor momento-energia**, composto pela lei da conservação de energia e momento linear relativista.

> “Desta forma, energia e momento linear passam a constituir um quadrivetor, fazendo com que as leis da conservação da energia e do momento linear deixem de ser independentes, tornando-se aspectos de uma lei de conservação covariante do quadrimomento” Lemos (2007, p. 198).

Então voltemos ao nosso problema da conservação do momento. Se não é a massa relativista que se conserva, então que quantidade é essa que se conversa para que haja a conservação do momento? Da discussão feita até aqui, já demos pistas suficientes sobre esta quantidade. Mas deixemos, explícito quem é esta quantidade. Façamos isso substituindo (49) em (48):

$$\frac{E_1^i}{c}+\frac{E_2^i}{c}=\frac{E_1^f}{c}+\frac{E_2^f}{c}$$

$$E_1^i+E_2^i=E_1^f+E_2^f....(56)$$

Vemos aqui agora a verdadeira natureza da “massa relativista” que se conservava, não sendo está, nada mais do que meramente uma lei antiga de conservação de energia total de um sistema isolado. Como foi destacado até aqui, vemos pelas nossas deduções que a leis da energia e momento se relacionam de maneira intima na relatividade. Ficando o momento vinculado a uma lei geral de conservação de energia relativista que, como veremos esta é uma lei de conservação de massa-energia, no qual a quantidade que se conserva é $E=E_c+E_0$. Entretanto, esta discussão fica para a sessão posterior, quando esclarecermos todos os pontos de inconsistência da introdução da massa relativista e estivermos prontos para compreender a verdadeira relação entre massa energia.

Podemos, a título de problematização, afirmar de que estas deduções só nos levam a confirmar a conservação de massa relativista, pois se desenvolvermos a equação (56) e cancelarmos a constante da velocidade da luz no vácuo, temos a conservação de massa relativista.

$$E_1^i+E_2^i=E_1^f+E_2^f$$

$$\frac{m_1 c^2}{\sqrt{1-\frac{(v_1{}^i)^2}{c^2}}}+\frac{m_2 c^2}{\sqrt{1-\frac{(v_2{}^i)^2}{c^2}}}=\frac{m_1 c^2}{\sqrt{1-\frac{(v_1{}^f)^2}{c^2}}}+\frac{m_2 c^2}{\sqrt{1-\frac{(v_2{}^f)^2}{c^2}}}$$

$$\frac{m_1}{\sqrt{1-\frac{(v_1{}^i)^2}{c^2}}}+\frac{m_2}{\sqrt{1-\frac{(v_2{}^i)^2}{c^2}}}=\frac{m_1}{\sqrt{1-\frac{(v_1{}^f)^2}{c^2}}}+\frac{m_2}{\sqrt{1-\frac{(v_2{}^f)^2}{c^2}}}$$

Entretanto afirmamos que não, pois a essa “massa relativista” nada mais é do que fundamentalmente idêntica à energia relativista. Como afirma Valadares (1993, p. 122): “[…] a massa relativista de uma partícula, M, dada por $\mathrm{M}=\frac{E}{c^2}$, acaba por ser fundamentalmente idêntica a sua energia total (pois é-lhe proporcional, sendo a constante de proporcionalidade universal). [...]”. Então, por isso voltamos a afirmar que o momento se conserva, não por uma nova lei de conservação de massa e sim por uma antiga e próspera lei de conservação de energia (BALDIOTTI, 2014 p. 97).

Em termos dos quadrivetores, podemos representar esta lei de conservação de momento e energia, simplesmente como:

$$\left(p_1^u\right)^i+\left(p_2^u\right)^i=\left(p_1^u\right)^f+\left(p_2^u\right)^f$$

Vale aqui ressaltar, que contrariamente ao que ocorre na Mecânica Clássica de Newton, na qual as leis de conservação do momento e energia de um sistema isolado são teoremas que tem origem nas leis de Newton, na relatividade restrita, estas leis são postuladas como princípios fundamentais da teoria (Caruso, 2006, p. 211).

B) O aumento de inercia introduzido pela massa relativista vem a explicar, o fenômeno de partículas aceleradas sobre uma força constante, que encontram seu limite de velocidade em "c".

Aqui reside a principal justificativa de diversos autores para a introdução da massa relativista. Para tal, eles se utilizam do exemplo de uma partícula de massa "m" sujeita a uma aceleração, devido a ação de uma força constante agindo sobre ela. Sabemos classicamente, que se uma partícula sujeita a uma aceleração constante, devido a uma força constante, obviamente esta variará seu momento indefinidamente devido a um aumento de velocidade. Entretanto, tendo em mente, que o postulado de Einstein delimita uma velocidade limite em "c", então, quando a partícula alcançar velocidades próximas à "c", essa força deixara de produzir grandes aumentos na velocidade, devido ao aumento da inércia dessa partícula com a velocidade, expressa pela massa relativista na equação $m\Big/\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$.

> "O crescimento indefinido da massa relativista para $v \to c$ costuma ser usado para explicar porque c é a velocidade limite: a medida que v se aproxima de c a inércia torna-se arbitrariamente grande e uma dada força produz uma aceleração cada vez menor, tornando o limite $v=c$ inatingível." Lemos (2001, p.6).

Diversos físicos conceituados, se utilizam desta justificativa para explicar este fenômeno. Entre eles encontramos o famoso físico Feynman (2009), expõem esse fenômeno do aumento de massa.

> "O que acontece se uma força constante atua sobre um corpo por um longo tempo? Na mecânica newtoniana, o corpo vai ganhando velocidade até ultrapassar a velocidade da luz. Mas isto é impossível na mecânica relativística. Na relatividade, o corpo vai ganhando não velocidade, mas momento, que pode aumentar continuamente, porque a massa está aumentando. Após algum tempo, praticamente não existe aceleração no sentido de uma mudança na velocidade, mas o momento continua aumentando. Claro que, sempre que uma força produz muito pouca mudança na velocidade de um corpo. dizemos que o corpo possui um alto grau de inércia, e isso é exatamente o que nossa fórmula da massa relativística diz - ela diz que a inércia é muito grande quando v está próximo de c.[...]" Feynman (2009, p. 15-9 – 15-10).

E tesse um exemplo para endossar sua explicação:

> "[…] para desviar o elétrons de alta velocidade no síncrotron, que é usado aqui no Caltech, precisamos de um campo magnético que é 2.000 vezes mais forte do que se esperaria com base nas leis de Newton. Em outras palavras, a massa dos elétrons no síncrotron é 2.000 vezes maior que sua massa normal e é tão grande quanto a de um próton! Essa m deve se 2.000 vezes m_0, significando que $1-{v^2}/{c^2}$ deve ser 1/4.000.000, portanto ${v^2}/{c^2}$ difere de 1 por uma parte em 4.000.000, ou que v difere de c por uma parte em 8.000.000, assim os elétrons estão se aproximando bastante da velocidade da luz. [...]" Feynman (2009, p. 15-10).

A maior inconsistência, ou defeito, nesta explicação reside no fato de que em geral a razão entre a força e a aceleração, não coincide com a "massa relativista" e portanto não pode ser considerada como medida de inercia no modelo newtoniano, pois a equação do movimento relativístico já não é dado simplesmente por $\vec{F}=M_R\vec{a}=\gamma m\vec{a}$ (LEMOS, 2001, p. 6). Como podemos constatar ao fazer a derivação da força tridimensional em (50):

$$\vec{F}=\frac{d\vec{p}}{dt}=\frac{d}{dt}(\gamma m\vec{v})$$

$$\vec{F}=m\left[\frac{d\gamma}{dt}\vec{v}+\gamma\frac{d\vec{v}}{dt}\right]$$

$$\vec{F}=m\left[\gamma^3\frac{\vec{a}.\vec{v}}{c^2}\vec{v}+\gamma\vec{a}\right].....(57)$$

De (54) temos que, $m\gamma^3\vec{a}.\vec{v}=\vec{F}.\vec{v}$. Portanto, temos em (57) que:

$$\vec{F}=\frac{\vec{v}}{c^2}\vec{F}.\vec{v}+\gamma m\vec{a}.....(58)$$

Decompondo a força e aceleração em componentes paralelas e perpendiculares ao movimento, em (58).

$$F_{\parallel}+F_{\perp}=\frac{v}{c^2}(F_{\parallel}+F_{\perp})v+\gamma m(a_{\parallel}+a_{\perp})$$

$$F_{\parallel}+F_{\perp}=\frac{\vec{v}}{c^2}(F_{\parallel}).\vec{v}+\gamma m(a_{\parallel}+a_{\perp})$$

$$\gamma m(a_{\parallel}+a_{\perp})=F_{\parallel}+F_{\perp}-\frac{\vec{v}}{c^2}(F_{\parallel}).\vec{v}$$

$$\gamma m a_{\parallel}+\gamma m a_{\perp}=F_{\parallel}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)+F_{\perp}$$

$$\gamma m a_{\parallel}+\gamma m a_{\perp}=\frac{F_{\parallel}}{\gamma^2}+F_{\perp}$$

Daqui obtemos as componentes da força perpendicular e paralela ao movimento.

$$F_{\parallel}=\gamma^3 m a_{\parallel}....(59)$$
$$F_{\perp}=\gamma m a_{\perp}....(60)$$

Destas componentes da força em (59) e (60), surge as definições de massa longitudinal (m_l) e massa transversal (m_t) no contexto relativista. Dadas por:

$$m_l=\gamma^3 m...(61)$$
$$m_t=\gamma m...(62)$$

Estas grandezas de massa, exprimem diferentes características da inércia de um corpo quando observada por diferentes direções em relação ao seu movimento. Então, ao aplicarmos uma força paralelamente à mesma direção da velocidade, alterando apenas o valor desta, sem mudar sua direção, então a resistência gerada pelo corpo no sentido de persistir no seu estado de movimento com o mesmo modulo de velocidade, é medida pela ***massa longitudinal*** ($m_l=\gamma^3 m$). Agora se aplicarmos a mesma força perpendicular à direção da velocidade, variando apenas a sua direção, então esta resistência do corpo em mudar sua direção de movimento é medida pela ***massa transversal*** ($m_t=\gamma m\ldots(62)$). Vemos que a "massa relativista", somente é expressa pela razão entre a força e aceleração, quando a força é aplicada perpendicularmente ao movimento $\gamma m=\frac{F_\perp}{a_\perp}$, enquanto para o caso da força atuando paralelamente ao movimento, a razão entre a força e aceleração não é mais dada pela massa relativista, sendo esta expressa pela massa longitudinal, $\gamma^3 m=\frac{F_\parallel}{a_\parallel}\neq\gamma m$. Segundo Lemos (2001, p. 6), a ideia de inercia newtoniana, como característica de resistência a acelerações é inconsistente com a dinâmica relativista e deve ser deixada de lado.

> "[…] a noção newtoniana de inércia como resistência à aceleração é incompatível com a dinâmica relativista, a menos que se esteja disposto a aceitar a ideia esdrúxula de que uma mesma partícula possua inércias diferentes conforme o tipo de força que a que esteja submetida. Assim, uma partícula carregada ao longo de um campo elétrico uniforme exibira como inércia a massa longitudinal, ao passo que uma partícula movendo-se num campo puramente magnético teria como inércia a massa transversal." Lemos (2001, p. 6).

Na concepção de diversos autores, atualmente, a justificativa do aumento de inércia do elétron a velocidades próximas a da luz e como consequência aumento de resistência a acelerações, se mostra inconsistente como foi deduzido, pois a razão entre a força e aceleração não é mais a massa relativista. Então como podemos justificar este fenômeno, se a massa relativista se torna inconsistente? Valadares (1993) lança uma luz sobre este problema, ao analisar o movimento de um elétron acelerado até uma fração considerável da velocidade da luz. Quando o elétron está em movimento lento, sobe a ação de uma força de $9{,}10\,x\,10^{-3}N$, na direção e sentindo do movimento, este aumentara sua velocidade em 1 m/s a cada 1 segundo medido. Se o elétron se mover a uma velocidade de 99,5 % da luz, sobre as mesmas condições, a mesma força levará 10 segundos para promover a mesma variação de velocidade. Ao contrário do que se pode imaginar, não houve um aumento na massa inercial da partícula, visto que o elétron é uma partícula sem estrutura interna, logo não se pode conceber que a energia a ele fornecida, para aumenta sua velocidade, tenha provocado-lhe alguma alteração interna que resultou no aumento de massa inercial. A explicação para tal fenômeno não reside na partícula e sim na medida do tempo, como consequência da dilatação temporal relativista; pois, um observador no referencial próprio da partícula, que mede o intervalo de tempo *próprio*, $d\tau$, ira medir o mesmo 1 segundo para o elétron aumentar sua velocidade em 1 m/s. Entretanto, para um observador dilatado no laboratório, que mede um tempo *não-próprio*, $dt=\frac{d\tau}{\sqrt{1-\frac{\vec{v}^2}{c^2}}}$, medirá um intervalo de tempo maior para um tempo correspondente a um dado intervalo de tempo próprio, no qual ocorre o aumento de velocidade devido a ação de força atuante sobre o elétron. Portanto, o fato de se observar um aumento no tempo requerido para se produzir o mesmo aumento de velocidade nada mais é do que uma consequencial cinemática da dilatação temporal e não um fenômeno dinâmico, devido a um aumento de massa (VALADARES, 1993, p. 122).

Lemos (2001) destaca:

> "A introdução da "massa relativista" na teoria especial da relatividade gera confusão entre um efeito aparentemente dinâmico (aumento de massa) e um efeito que, na verdade, é de natureza estritamente *cinemática*: o fator $\gamma=\left(1-v^2/c^2\right)^{-\frac{1}{2}}$ não tem origem na partícula, mas é consequência da transformação de Lorentz no referencial próprio para aquele em que ela é vista movendo-se com velocidade v ; reflete, portanto, as propriedades geométricas do espaço-tempo, sendo independente de qualquer dinâmica particular." Lemos (2001, p. 7).

Então, se não é a inercia da partícula não cresce com a velocidade, o que justificaria a velocidade da luz ser um limite? A explicação pode ser bem mais simples do que imaginamos e reside no fato de que na expressão da energia cinética relativista, $E\rightarrow\infty$ quando $v\rightarrow c$. Logo, um trabalho infinito seria requerido para acelerar uma partícula de massa m até $v=c$ (LEMOS, 2001, p. 6). Como verificamos abaixo, partindo do teorema do trabalho-energia cinética, temos:

$$w=E_C=\int \vec{F}\,.\,d\vec{x}=\int \frac{d\vec{p}}{dt}\,.\,d\,x$$

$$E_C=\int \frac{d\vec{p}}{dt}\,.\,d\,x\,\frac{dv}{dv}=\int \frac{d\vec{p}}{dv}\,.\,\frac{d\,x}{dt}\,dv$$

$$E_C=\int \frac{d\vec{p}}{dt}\,.\,d\,x\,\frac{dv}{dv}=\int \frac{d\vec{p}}{dv}\,.\,v\,dv\,.....(63)$$

Fazendo $\frac{d\vec{p}}{dv}$, temos:

$$\frac{dp}{dv}=\frac{d}{dv}\left(\frac{m\,v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right)=\frac{m}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}\,.....(64)$$

Substituindo (64) em (63), e integrando de 0 à v

$$E_C=\int_0^v \frac{m\,v'}{\left(1-\frac{v'^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}\,dv'$$

$$E_C=\int_0^v \frac{m\,v'}{\left(1-\frac{v'^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}\,dv'$$

$$E_c=\frac{m\,c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}-mc^2=mc^2(\gamma-1)\,...(65)$$

Vemos em (65) os argumentos matemáticos da impossibilidade de uma partícula de massa ser acelerada até a velocidade da luz. Como destaca Einstein (1905, p. 22) em seu artigo sobre a eletrodinâmica dos corpos em movimento, ao apresentar a equação (65) da energia cinética de um elétron: “Assim, quando $v=c$, w se torna infinito. Não havendo possibilidade de existência – como em nossos resultados anteriores – de velocidades maiores que a da luz.”. Ostermann (2004) destaca:

> “[…] considerando que o corpo esteja inicialmente em repouso com relação ao observador, como o seu momentum linear torna-se infinito quando a velocidade aproxima-se de c, segue daí que seria necessário um impulso de valor infinito, o que é fisicamente impossível, para acelerar o corpo até a velocidade da luz. Um outro

> argumento para justificar tal impossibilidade é baseado no teorema trabalho-energia cinética, pelo qual seria necessário realizar um trabalho infinito para efetuar a tarefa. Como vemos, é possível justificar a existência de um limite superior para a velocidade sem fazer qualquer referência ao conceito de massa relativística." Ostermann (2004, p. 87).

Embora, o argumento apresentado seja suficiente para justificar o limite de velocidade em "c", apresentemos alguns argumentos matemáticos que endosse este limite cósmico de velocidade. Façamos isso através da análise da expressão da velocidade e acelerações, deduzidas abaixo, para o referencial que S no qual observa o movimento de uma partícula, que se desloca com velocidade v(t); obtida a partir da definição de momento tridimensional relativista.

$$\vec{p}=\frac{mv}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\left(\frac{p}{m}\right)^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)=v^2$$

$$v^2=\left(\frac{p}{m}\right)^2-\left(\frac{p}{m}\right)^2\left(\frac{v^2}{c^2}\right)$$

$$v^2+\left(\frac{p}{m}\right)^2\frac{v^2}{c^2}=\left(\frac{p}{m}\right)^2$$

$$v(t)=\frac{p(t)/m}{\sqrt{1+\left(\frac{p(t)}{mc}\right)^2}}.....(66)$$

Fazendo a derivação, $a=\frac{dv(t)}{dt}$, obtemos a aceleração abaixo:

$$a(t)=\frac{F(t)/m\left[\sqrt{1+(p(t)/mc)^2}-(F(t)/mc)^2(1+p^2(t)/m^2c^2)^{\frac{-1}{2}}\right]}{1+(p(t)/mc)^2}.....(67)$$

Para o caso de uma partícula de massa m e carga elétrica e , inicialmente em repouso, em um campo elétrico uniforme independente do tempo (E_e), as equações de força e o momento desta partícula são expressos, respectivamente por:

$$F(t)=eE_e \quad ; \quad p(t)=eE_e\,t$$

Com base nestas expressões, as equações (66) e (67) se modificam da seguinte maneira.

$$v(t)=\frac{(eE_e/m)\,t}{\sqrt{1+\left(\frac{eE_e\,t}{mc}\right)^2}}=\frac{c}{\sqrt{1+\left(\frac{mc}{eE_e\,t}\right)^2}}\;....(68)$$

e

$$a(t)=\frac{\frac{eE_e}{m}\left[\sqrt{1+\left(\frac{eE_e\,t}{mc}\right)^2}-\left(\frac{eE_e\,t}{mc}\right)^2\left(1+\frac{eE_e\,t}{m^2c^2}\right)^{\frac{-1}{2}}\right]}{1+\left(\frac{eE_e\,t}{mc}\right)^2}\;....(69)$$

Percebe-se que no limite de $t\rightarrow\infty$, as equações acima tendem para os seguintes valores:

$$\lim_{t\rightarrow\infty} v(t)\rightarrow c \quad \text{e} \quad \lim_{t\rightarrow\infty} a(t)\rightarrow 0$$

Portanto, se uma força elétrica constante estiver atuando infinitamente sobre uma partícula carregada, sua velocidade não crescera infinitamente como se esperaria classicamente, esta ira crescer até “c” e não conseguirá superá-lo. Como consequência disto, a aceleração tende a zero quando a partícula chega a velocidades próximas a “c”, independentemente do valor desta força aplicada sobre ela. Então, na relatividade, uma força constante não implicara diretamente numa aceleração constante, ao contrário, implicara numa aceleração decrescente com o aumento da velocidade relativa entre dois referenciais, pois como vimos, esse aumento de velocidade influencia diretamente na medida de tempo não-próprio e este, por consequência, está ligado a aceleração por $a(t)=\frac{d(v(t))}{dt}$.

Embora, até aqui estivemos discutindo a impossibilidade de acelerar uma partícula de massa “m” até valores maiores que “c”, vale salientar, que as nossas equações de energia e momento relativista, nos apresentam uma impossibilidade desta partícula alcançar “c”. Segundo estas, apenas partículas de massa nula podem se deslocar a velocidade da luz (CARUSO, 2006, p. 200). Tais partículas de massa nula são amplamente comprovadas em laboratório, como por exemplos os fótons, sendo

$$m = \left(\frac{\vec{v}}{\vec{p}}\right)\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \quad , \quad m = \left(\frac{E}{c^2}\right)\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

Para, $v=c$, temos nestas equações:

$$m=0$$

4. MASSA E ENERGIA: UMA MESMA PROPRIEDADE DE UM SISTEMA E A TRANSFORMAÇÃO ENTRE MASSA E ENERGIA.

A energia relativística também carrega consigo a conotação, histórica de massa relativística. Entretanto, como visto até aqui, esta "massa relativista" acaba por ser fundamentalmente equivalente à energia total do sistema, $M \equiv E$, sendo mais útil a utilização do termo de energia do que massa, pois como veremos, isso nos possibilita a variação direta e proporcional da massa, com o aumento ou redução de energia de repouso de um corpo. Podendo ser constatado isto, ao passo que fazemos uma expansão em série de Taylor, na equação da energia relativista total de uma partícula livre, para velocidades pequenas comparadas à da luz e assim obtemos:

$$\mathrm{E} = \frac{1}{2} m v^2 + \mathrm{mc}^2 \ldots (71)$$

Observa-se, que o primeiro termo em (71) é a energia associada ao estado de movimento global da partícula e é variante ao transladar-se de referencial inercial para referencial inercial; enquanto o segundo termo desta expressão, chamado de **energia de repouso**, está associado ao conteúdo energético intrínseco da partícula, sendo este invariante para esta mesma translação e possui o mesmo valor em todos os referenciais inerciais. A energia de repouso também é tida, como a energia mínima que uma partícula livre (não sofrendo nenhum tipo de interação) pode ter, no caso em que se encontra em repouso num referencial.

$$E_0 = \mathrm{mc}^2 \ldots\ldots (72)$$

A eq. (72) exprime uma equivalência fundamental entre a massa e energia. Estas grandezas diferem-se, de maneira não fundamental, apenas por uma constante de conversão de unidade c . Portanto, se uma partícula perde ou recebe energia na forma de radiação eletromagnética, por exemplo, a uma taxa de ΔE_0 , logo sua massa varia proporcionalmente a uma taxa equivalente a $\Delta m \equiv \Delta E_0$, ou seja, se uma partícula recebe energia, sua massa cresce, e se esta perde energia, sua massa diminui. Ostermann (2004) em seu artigo, disserta sobre a expressão (72) e sua confusão gerada ao introduzir a equivalência da massa-energia por meio de $E = M c^2$, ou como ele denota $E = m_r c^2$, e não por $E_0 = \mathrm{mc}^2$.

> "Ela é também a expressão correta da equivalência massa-energia, ao contrário da expressão alternativa $E = m_r c^2$, nunca empregada por Einstein, mas muito popular em livros didáticos, mesmo em alguns dirigidos a cursos de graduação. Embora fornecendo resultados numéricos corretos, esta expressão para a energia mecânica relativística introduz sérios problemas de ordem histórica e conceitual." Ostermann (2004, p. 91).

A equação (72) não é aplicável unicamente às partículas, como o elétron, mas também é extensível para corpos macroscópicos que são compostos por constituintes mais elementares ligados entre si. A energia de repouso, não engloba a energia cinética de translação do centro de massa do corpo, entretanto, essa energia de repouso é associada à energia interna deste corpo, que é formada pelas energias potenciais de ligações dos elementos que compõe este corpo e suas energias cinéticas, bem como as energias associadas a massa (energia de repouso) destes constituintes (OSTERMANN, 2004, p. 93-94).

$$E_0 = mc^2 = \sum_i \gamma_i m_i c^2 + U_{inter} \ldots. (73)$$

Segundo Caruso (2006, p 213), a relação acima implica que a massa de um sistema não é igual à soma das massas individuais de seus constituintes e, portanto, a massa não é uma grandeza aditiva, o que é aditivo é a energia.

$$m \neq \sum_i \gamma_i m_i \ldots. (74)$$

Na Física Nuclear, onde as energias cinéticas dos constituintes são bem menores comparadas a energia de repouso destes constituintes, implicando em $v_i \ll c$, portanto expressar a energia de repouso em (73), como:

$$E_0 = mc^2 = (\sum_i m_i) c^2 + \sum_i m_i \frac{v_i^2}{2} + U_{inter} ....(75)$$

Ostermann (2004) destaca:

> "[…]Para sistemas estáveis, como um núcleo atômico por exemplo, em geral a energia total de ligação (negativa) suplanta em valor a energia cinética microscópica total (positiva), de tal forma que a energia interna resulta negativa e, portanto, a energia de repouso diminui de valor em relação à soma das energias de repouso dos constituintes se eles não estão ligados.[…] o que explica porque a massa dos núcleons em um núcleo atômico estável é menor do que suas massas quando livres." Ostermann (2004, p. 94).

Dada a energia de repouso em (72), então podemos substituir em (65) e obtermos da energia cinética de uma partícula livre a sua energia relativista.

$$E_c = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - mc^2 = \gamma mc^2 - mc^2$$

$$\gamma mc^2 = E_c + E_0$$

$$E = E_c + E_0 ......(76)$$

Obtemos assim, uma expressão que nos fornece um entendimento maior da quantidade que é conservada, quando ocorre à conservação do momento. Sendo esta quantidade de energia, associada a soma de duas quantidades distintas de energia, no qual o primeiro termo em (76) é associado a uma energia de translação, e essa só dependerá da velocidade relativa em relação ao referencial no qual está sendo observado. Enquanto a segunda, está associado a uma propriedade da partícula que só dependera da energia associado associada a sua massa, e esta por sua vez, dependerá apenas das energias associados aos seus constituintes, se o corpo estudado possuir tais constituintes, como foi discutido.

Vale destacar, que o princípio da conservação da energia relativista pode ser comprovada experimentalmente, como por exemplo, no caso de colisões relativista entre duas partículas, enquanto o princípio da conservação de massa não pode ser tratado de maneira isolada na TRR, como uma consequência da relação da massa e energia de repouso, $\Delta m \equiv \Delta E_0$. Havendo uma ligação, entre as leis de conservação de massa e energia, em uma única lei de conservação de massa-energia. Como destaca Riffel (2010, p. 53 – 52): "A relação massa-energia implica na substituição das leis de conservação de massa e de energia por uma única lei de conservação de massa-energia, na qual a quantidade que se conserva é $E=E_c+E_0$ ". Podemos facilmente concluir, que a energia relativista é conservada desde que $\Delta E=0$, e portanto:

$$\Delta E_0=-\Delta E_c.....(77)$$

Analisemos essa condição de conservação de energia relativista em (74), para os casos de colisões elásticas e inelásticas.

<u>Colisões elásticas</u>

Supomos que duas partículas de massa m_1 e m_2 colidam elasticamente, não haverá redução ou aumento da energia cinética total do sistema. Então temos que a energia cinética total antes é igual a energia cinética total após a colisão:

$$(E_c)_f=(E_c)_i$$

Implicando em (74), que:

$$\Delta E_0=0$$

Portanto, numa colisão perfeitamente elástica, não ocorre a variação da energia de repouso, então dizemos que a soma das massas das partículas foi conservada, $\Delta m=0$, não havendo neste caso aniquilação ou desintegração da soma das massas iniciais das partículas. No caso, para o qual deduzimos a conservação do momento relativístico, estávamos considerando a colisão elástica entre duas partículas, para o qual não houver variação da energia cinética total após a colisão, então neste caso, tanto a energia cinética bem como a energia de repouso fora conservada, e como consequência disto as massas das partículas foram conservadas, respeitando assim a conservação de energia relativista.

Colisões inelásticas

Agora para o caso de não haver conservação de energia cinética? Então tratamos de colisões inelástica, onde:

$$(E_c)_f \neq (E_c)_i$$

Implicando em duas possibilidades:

1° $(E_c)_f > (E_c)_i$, então $(E_0)_i > (E_0)_f$. Portanto, houve aumento de energia cinética e perda de energia de repouso e consequentemente $m_i > m_f$.

2° $(E_c)_i > (E_c)_f$, então $(E_0)_i > (E_0)_f$. Havendo perda de energia cinética e aumento de energia de repouso, e consequentemente $m_f > m_i$.

Neste tipo de processo, a energia de repouso das partículas, ou corpos, não é conservada e, então, suas massas também não serão. Por consequência, não haverá conservação de energia cinética também, devido ao postulado de conservação de energia total, visto que, a quantidade $E = E_c + E_0$ tem que ser uma constante, implicando que a variação da energia de repouso após uma colisão, ocasiona uma variação proporcional e inversa na energia cinética final.

Muitos autores afirmam, que neste processo de colisão inelástica, ocorrer uma conversão direta de massa em energia, como no caso 1, ou uma conversão de energia em massa, como no caso 2. Mas nos indagamos, é próprio falar de conversão de massa em energia, onde a uma mudança na propriedade física da massa em energia cinética? Há então a destruição de massa, deixando esta de existir, e a criação de energia numa quantidade equivalente a massa destruída, neste processo? Em nossa concepção ambas essas perguntas são respondidas como não. Lapa (2012, p. 220) compartilha desta visão ao afirma que: “massa e energia *são* a mesma propriedade dos sistemas físicos. Consequentemente, não há nenhum sentido em que uma das propriedades é fisicamente convertida em outra”.

Para Eddington (1929)

> “[...]parece muito provável que massa e energia são duas maneiras de medir o que é essencialmente a mesma coisa, no mesmo sentido que paralaxe e distância de uma estrela são dois modos de exprimir a mesma propriedade de localização.” Eddington (1929, p. 146 apud LAPA, 2012).

O próprio Einstein em seu livro, O Significado da Relatividade, defende esta equivalência entre massa e energia, na qual ambas definem a mesma propriedade física: “Massa e energia são portanto essencialmente idênticas; elas são apenas expressões diferentes de uma mesma entidade. A massa de um corpo não é constante; varia com a variação de energia” (Einstein, 1984 apud VALADARES, 1993, p. 115). Valadares afirma, que a ideia mais importante que Einstein estabeleceu a respeito da massa foi: “que esta grandeza constitui uma propriedade do corpo que é essencialmente idêntica à energia que ele contém e que mede a sua inércia” (VALADARES,1993, p. 115). Portanto, podemos e devemos afirmar que as supostas conversões entre massa e energia, no qual supostamente haveria destruição de massa e criação de energia, são na realidade apenas transformações de energia de uma espécie associada a massa, em outra espécie associada ao movimento (LAPA, 2012, p. 227).

Um exemplo de transformação de energia associada a massa é o bombardeamento de alvos de lítio (Li), cuja massa 7,0104 u, com prótons (p), de massa 1,0072 u. No qual, devido a essa reação, ocorre a emissão de duas partículas alfas (α), de massa 4,00150618 u cada. Não havendo nesta reação mudança no número de partículas, visto que o lítio, é composto de 3 prótons e 4 nêutron. Enquanto as partículas alfas, são composta de 2 prótons e 2 nêutrons cada.

$$p+Li \rightarrow 2\alpha$$

Neste caso, temos que a soma das massas dos reagentes é maior que a soma das massas do produto, em contrapartida, observa-se que a soma das energias cinética dos reagentes é menor que a soma da energia cinética do produto. Então, constatamos que a energia de repouso é liberada na reação na forma de energia cinética das partículas alfas.

Podemos medir a quantidade de energia liberada nos processos de fissão, pela relação abaixo.

$$Q=(M-\sum_i m_i)c^2$$

Então a quantidade de energia repouso na forma de energia cinética das partículas alfas.

$$Q=[(m_p+m_{Li})-2m_\alpha]c^2 \simeq 14{,}3\,MeV$$

Lapa (2012) comenta sobre esse processo de transformação, onde somos levados a pensa que houve um processo de conversão entre massa energia.

> "[…]os físicos agora explicam tais reações não como casos de massa que é convertida em energia, mas apenas como casos onde a energia mudou de forma. Tipicamente, nestes tipos de reações, a energia potencial, que "contribui" para a massa de repouso de um (ou possivelmente mais) dos reagentes, é transformada de uma forma não-controversa em energia cinética dos produtos." Lapa (2012, p. 216).

Como a massa é um invariante na relatividade, assim como na mecânica clássica, e a definimos conceitualmente nesse cenário como fundamentalmente equivalente a energia de repouso e que mede a sua inércia. Devemos então, em seguida, encontrar uma expressão invariante, na qual possamos definir o valor da massa em qualquer referencial inercial e que conduzam sempre ao mesmo valor. Podendo ser obtida tal expressão, através do produto contravariante e covariante, do quadrivetor momento-energia em (55).

$$p^u=\left(\frac{E}{c},\vec{p}\right) \quad , \quad p_u=\left(-\frac{\mathrm{E}}{c},\vec{p}\right)$$

$$p^u\,p_u=-E^2+\mathrm{p}^2$$

$$p^u\,p_u=-\left(\frac{m\,c}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right)^2+\left(\frac{m\,v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right)^2=\frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}}\left(-m^2\,c^2+\mathrm{m}^2 v^2\right)$$

$$p^u\,p_u=\frac{m^2}{1-\frac{v^2}{c^2}}\left(-c^2+\mathrm{v}^2\right)=\frac{m^2}{\frac{c^2-v^2}{c^2}}\left(-c^2+\mathrm{v}^2\right)=\frac{-m^2}{\frac{1}{c^2}}$$

$$p^u\,p_u=-m^2\,c^2$$

$$\frac{E^2}{c^2}-p^2=\mathrm{m}^2\,c^2$$

$$\mathrm{m}=\pm\frac{\sqrt{E^2-p^2c^2}}{c^2}\ldots.(78)$$

A massa expressa em (78) é definida como *massa invariante de Lorentz.* Na qual E é a energia total, associada à partícula ou sistema, e p, o seu momento (medidos em um mesmo referencial inercial). Esta expressão exprime verdadeiramente a massa como uma propriedade intrínseca da matéria que independe do referencial no qual ela é observada (VALADARES, 1993, p. 123-124). É relevante destacar, que apesar de a massa ser um invariante, ela não é uma quantidade conservada. Invariante pois, possui o mesmo valor em todos os referenciais inerciais; e não é conservada, visto que, após um processo em que perde ou ganho de energia, como nos casos de colisões inelásticas discutidos anteriormente, sua massa aumenta ou diminui. Entretanto, a massa de um sistema isolado, formado por duas ou mais partículas trocando energia entre si, é uma quantidade conservada e invariante.

> "Numa transformação que ocorrer num sistema isolado o conteúdo de energia mantém-se e, portanto, também se mantém a massa do sistema. Temos assim que a massa nos sistemas isolados é duplamente invariante: não varia ao longo do tempo, e também não varia de RI para RI." Valadares (1993, p. 124).

Apesar de tudo que argumentamos ao longo deste trabalho, pode-se argumentar ainda sobre o processo de produção de pares, em que um elétron e um pósitron colidem e originam dois fótons, com intuito de se justificar a conversão de massa em energia. Então, analisemos tal problema no intuito de tenta elucidar tal "conversão" entre massa em energia:

$$e^{+'} + e^{-'} \rightarrow \gamma + \gamma$$

Consideremos que o pósitron e o elétron estão em movimento lento, de modo a desprezarmos suas energias cinéticas em comparação a sua energia de repouso, viajando em direções opostas; e com ambos possuindo massa m. Pelas leis de conservação de energia e momento, teremos:

$$E_f = E_i = 2mc^2$$
$$P_f = P_i = 0$$

Pela equação (78) temos, que a massa do sistema (M) antes do processo de colisão era.

$$M = 2mc$$

Num referencial onde o sistema composto pelos dois fótons está em repouso, temos que a massa do sistema é dada por.

$$M = 2mc$$

Vale salientar, que apesar de o fóton ser uma partícula não dotada de massa de repouso, um sistema de dois fótons, possui massa e energia de repouso, pois neste caso, é possível se definir um referencial no qual esse sistema está em repouso, ou seja, que possua momento total nulo. Perguntamos então, como pode ter havido conversão de massa em energia, se a massa antes e depois da colisão é a mesma? Respondemos essa pergunta dizendo que houve conversão em que uma mudança na manifestação da energia, está deixando de se manifestar como energia de repouso do elétron e pósitron, passando a manifestar-se como energia cinética dos dois fótons, que apesar de possuir massa de repouso nula, possuem energia cinética, que contribui para energia de repouso do sistema. (VALADARES, 1993, p. 125).

Por final, podemos destacar a importância da equivalência de massa e energia na concepção dos físicos sobre a matéria, pois abre a possibilidade da descrição de coisas que rotineiramente tratamos como matéria (que possui como propriedade massa) em termos de campos (que possui como propriedade energia). Visto que, a energia de um campo em um certo nível pode se manifestar em termos de massa em um outro nível (LAPA, 2012, p. 230).

6. CONCLUSÃO

Este trabalho se desenvolve no intuito de mostrar, o quanto conceitos aparentemente bem estabelecidos, podem nos reservar uma gama vasta de novos entendimentos, acerca da natureza, enquanto nossa concepção de teorias vai evoluindo. É neste contexto, que surgem aspectos interessantes associados ao conceito de massa, desde as suas concepções iniciais até o palco onde ocorre a TRR. Não obstante, isso se faz necessário, visto que, o conceito de massa, na TRR, se revela consideravelmente confuso em diversos livros didáticos. Entendemos especificamente, acerca deste tema que, se pretendermos falar sobre o conceito de massa, no contexto relativista, devemos nos concentrar nas definições primordiais (postulados) e, a partir delas, deduzir as demais quantidades e, por final, interpretar as suas consequências nas explicações dos fenômenos naturais.

Nesse sentido, por exemplo, torna-se claro a origem e o papel desempenhado pelo fator de Lorentz, quando este é, equivocadamente, associado a massa de repouso, ao invés, de sua associação com a quadrivelocidade (eq. 37), que é o que de fato ocorre via dedução direta. Entretanto, tal associação aparentemente ingênua é responsável por introduzir uma dependência da massa de uma partícula com a sua velocidade. Acreditamos ser correta a restrição da existência, na TRR, de apenas a massa de repouso e a nenhuma outra mais para que, por meio desta possa ser feita a conexão com o significado de inércia de um corpo e que equivale à massa inercial definida por Newton. Se quisermos defini-la conceitualmente, devemos dizer que esta equivale a sua energia medida no referencial de repouso e possui a propriedade de medir a inércia do corpo. Se pretendermos defini-la operacionalmente, devemos expressá-la através de $m=\frac{\sqrt{E^2-p^2c^2}}{c^2}$ que exprime a invariância desta massa entre referenciais inerciais, ou seja, de fato se trata de um escalar de Lorentz.

Também conclui-se, que é preciso cuidado quando nos remetemos a falar de conversões de massa em energia, pois isso estará correto em se tratando de transformação entre tipos de energia do sistema, transformando-se energia de repouso, associado a massa, em energia cinética, associada ao movimento. Entretanto, as transformações de energia interna de um sistema isolado não altera sua inércia, sendo neste caso a massa do sistema invariante e conservada, embora a massa de seus constituintes não seja apenas invariante, pois como destacamos, o que é aditivo não é massa é sim energia.

Salientamos, que o conceito de massa é muito interessante por transitar por diferentes áreas da física, ou seja, problemática referente ao conceito de massa não se esgota aqui. A título de exemplo, uma extensão natural do trabalho aqui apresentado, é investigar aspectos relacionados a massa no contexto da teoria da relatividade geral, onde uma possível pergunta a ser respondida se refere a conexão entre a massa (tensor energia-momento) e a “curvatura” do espaço-tempo.

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

1. ARRUDA, Sergio M.; **Sobre as Origens da Relatividade Especial: Relações Entre Quanta e Relatividade em 1905**. Caderno Catarinense de Ensino de Física. Florianópolis. v. 13. n° 1: p.32-47, Abr.1996.

2. BALDIOTTI, M.C.; **Física moderna I – Parte A: A TEORIA DA RELATIVIDADE**. Abr. 2014.

3. BAPTISTA, José Plinio; FERRACIOLI, Laércio; **A Construção do Princípio de Inércia e o Conceito de Inércia Material.** Revista Brasileira de Ensino de Física. v. 22. n° 2: p. 272-280, jun. 2000.

4. BRITO, Antônio A. S.; **O PLANO INCLINADO: UM PROBLEMA DESDE GALILEU**. Caderno Catarinense de Ensino de Física. Florianópolis, v. 2, n° 2: p. 57-63, ago. 1985.

5. CAMPOS, Alexandre; **A complexidade do movimento local na Física aristotélica**. Revista Brasileira de Ensino de Física. v. 34. n° 2: 3601-1 – 3601-8. 2012.

6. CARUSO, Francisco; OGURI, Vitor; **FÍSICA MODERNA: ORIGENS CLÁSSICAS E FUNDAMENTOS QUÂNTICOS**. Rio de Janeiro: Elsevier, 2006.

7. CASTELLANI, Otávio Cesar; **Discussão dos Conceitos de Massa Inercial e Gravitacional.** Revista Brasileira de Ensino de Física**.** v. 3. n° 3: p. 356-359, set. 2001.

8. EINSTEIN, A.; **Física e Realidade**. Revista Brasileira de Ensino de Física. v. 28. n° 1: p. 9 – 22. 2006.

9. EINSTEIN, A.; **Sobre a Eletrodinâmica dos Corpos em Movimento**. 1905.

10. EINSTEIN, A.; **Sobre o Princípio da Relatividade e Suas Implicações**. Revista Brasileira de Ensino de Física. v. 27. n° 1: p. 37 – 61. 2005.

11. FEYNMAN, Richard P.; LEIGHTON, Robert B.; SANDS, Matthew; **LIÇÕES DE FÍSICA DE FEYNMAN**. v. 1. Porto Alegre: Bookman, 2009.

12. GRIFFITHS, David J.; **ELETRODINÂMICA**. 3° ed: Pearson Education, 2011.

13. JACKSON, John David; **ELETRODINÂMICA CLÁSSICA**. 2°ed. Rio de Janeiro: Guanabara Dois, 1983.

14. JAMMES, Max; **CONCEPTS OF MASS IN CONTEPORARY PHYSICS AND PHILOSOPHY**. Princeton University: 2000.

15. JARDIM, Wagner T. **A teoria da relatividade restrita e os livros didáticos do Ensino Médio: Discordâncias sobre o conceito de massa**. v. 32. n° 2: 2506-1

– 2506-7, 2015.

16. LAPA, Raphael Santos; **A EQUIVALÊNCIA ENTRE MASSA E ENERGIA**. Polemos, 2012.

17. LEMOS, Nivaldo A.; **E=mc², Origem e Significado**. Revista Brasileira de Ensino de Física**.** v. 23. n° 1: 3-9, Março. 2001.

18. LEMOS, Nivaldo A.; **MECÂNICA ANALÍTICA**. 2°ed. São Paulo: Livraria da Física, 2007.

19. NEWTON, Issac; **MATHEMATICAL PRINCIPLES OF NATURAL PHILOSOPHY AND HIS SYSTEM OF THE WORLD**. University of California: 1729.

20. OSTERMANN, F.; **RELATIVIDADE RESTRITA NO ENSINO MÉDIO: OS CONCEITOS DE MASSA RELATIVÍSTICA E DE EQUIVALÊNCIA MASSA-ENERGIA EM LIVROS DIDÁTICOS DE FÍSICA**. Caderno Brasileiro de Ensino de Física. v. 21. n° 1: p. 83-102, abr. 2004

21. PORTO, C. M.; PORTO; M. B. D. S. M; **A Evolução do Pensamento Cosmológico e o Nascimento da Ciência Moderna**. Revista Brasileira de Ensino de Física. v. 30. n° 4: p. 4601-1 – 4601-9. 2008.

22. PORTO, C. M.; PORTO; M. B. D. S. M; **Galileu, Descartes e a Elaboração do Princípio da Inércia**. Revista Brasileira de Ensino de Física. v. 31. n°4: 4601-1 – 4601-10. 2009.

23. RAMALHO, F.; FERRARO, N. G. e SOARES, P. A. T.; **FUNDAMENTOS DA FÍSICA 1: MECÂNICA,** Moderna, 2007.

24. RIFFEL, R. A.; **Uma Introdução a TEORIA DA RELATIVIDADE ESPECIAL**. Santa Maria: 2010.

25. ROCHA, A. N.; **Transformações de Galileu e de Lorentz: um estudo via teoria de grupos**. Revista Brasileira de Ensino de Física. v. 35. n°4: 4304-1 – 4304-9. 2013.

26. ROVARIS, Tatiana Romero; **O Projeto Epicurista Antiaristotélico de Pierre Gassendi**. Salvador: 2007.

27. TERRAZAN, Eduardo A.; **A inserção da física moderna e contemporânea no ensino de física na escola de 2º grau**. Caderno Catarinense de Ensino de Física. Florianópolis, v. 9, n° 3: p. 209-214, dez. 1992.

28. VALADARES, Jorge António; **O Conceito de Massa. I. Introdução Histórica.** Revista Brasileira de Ensino de Física**. v.** 15. n°s 1 a 4: p. 110-117, 1993.

29. VALADARES, Jorge António; **O Conceito de Massa. II. Análise do Conceito**. Revista Brasileira de Ensino de Física. v. 15. n°s 1 a 4: p. 118-126, 1993.