



UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAPÁ
PRÓ-REITORIA DE ENSINO DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
DEPARTAMENTO DE PÓS-GRADUAÇÃO
COORDENAÇÃO DO CURSO DE ESPECIALIZAÇÃO EM ENSINO DE FÍSICA

EDENIL QUARESMA DE SOUZA

**ESTUDO DA DINÂMICA DE UMA PARTÍCULA SUBMETIDA A FORÇAS
RESISTIVAS DO TIPO LINEAR E QUADRÁTICA**

Macapá

2020



UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAPÁ
PRÓ-REITORIA DE ENSINO DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
DEPARTAMENTO DE PÓS-GRADUAÇÃO
COORDENAÇÃO DO CURSO DE ESPECIALIZAÇÃO EM ENSINO DE FÍSICA

EDENIL QUARESMA DE SOUZA

**ESTUDO DA DINÂMICA DE UMA PARTÍCULA SUBMETIDA A FORÇAS
RESISTIVAS DO TIPO LINEAR E QUADRÁTICA**

Trabalho de Conclusão de Curso
apresentado Coordenação do curso de
especialização em ensino de física da
Universidade Federal do Amapá como
requisito para a obtenção do grau de
especialista em Ensino de Física.

Orientador: Prof. Dr. Yony Milla.

Macapá

2020

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Biblioteca Central/UNIFAP-Macapá-AP
Elaborado por Aline Farias Bandeira Couto – CRB-2 0017/O

S719e Souza, Edenil Quaresma de
Estudo da dinâmica de uma partícula submetida a forças resistivas do tipo linear e quadrática
[recurso eletrônico] / , Edenil Quaresma de Souza - Macapá, 2020.
26 f.

Orientador: Yony Walter Milla Gonzales.
Trabalho de Conclusão de Curso (Especialização em Ensino de Física) - Universidade Federal do
Amapá – UNIFAP, Departamento de Pós-Graduação, Coordenação do Curso de Especialização
em Ensino de Física. 2020.

Modo de acesso: World Wide Web.

Formato de arquivo: Portable Document Format (PDF).

1. Física – estudo e ensino 2. Forças resistivas 3. Dinâmica (Física). 4. Energia mecânica. I.
Gonzales, Yony Walter Milla, orientador. II. Universidade Federal do Amapá - UNIFAP. III. Título.

CDD 23. ed. – 530.07

SOUZA, Edenil Quaresma de. **Estudo da dinâmica de uma partícula submetida a forças resistivas do tipo linear e quadrática**.
Orientador: Yony Walter Milla Gonzales. 2020. 26 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Especialização em Ensino de Física) –
Departamento de Pós-Graduação, Universidade Federal do Amapá, Macapá, 2020.

EDENIL QUARESMA DE SOUZA

**ESTUDO DA DINÂMICA DE UMA PARTÍCULA SUBMETIDA A FORÇAS
RESISTIVAS DO TIPO LINEAR E QUADRÁTICA**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado Coordenação do curso de especialização em ensino de física da Universidade Federal do Amapá como requisito para a obtenção do grau de especialista em Ensino de Física.

Orientador: Prof. Dr. Yony Walter Milla González

DATA DE APROVAÇÃO: ____/____/____

Orientador: Prof Dr. Yony Walter Milla González

Examinador: Prof. Dr. Robert R. M. Zamora

Examinador: Prof. Me. Erveton Pinheiro Pinto

Macapá-AP

2020

RESUMO

Neste trabalho de Conclusão de curso de especialização no ensino de física, analisamos alguns aspectos da dinâmica do movimento de um projétil no plano vertical e de curta distância, considerando que este interage com dois tipos de forças, uma a força gravitacional, que é vertical e conservativa e outra que é devido a interação do projétil com as partículas de ar (atmosfera) que resulta numa força de atrito de natureza dissipativa. Neste último caso ainda consideramos as duas formas de força de atrito, uma que é linearmente proporcional ao vetor de velocidade instantânea do projétil e a outra forma onde a força de atrito é quadraticamente proporcional ao vetor da velocidade instantânea do projétil. Em particular nós analisamos como é a dissipação da energia mecânica do projétil em diferentes parâmetros das condições iniciais de tiro, ângulo de tiro e a velocidade inicial, em cada caso das formas dissipativas das forças de atrito.

Palavras-chave: Projétil. Partícula. Forças.

ABSTRACT

In this Conclusion work of a specialization course in physics teaching, we analyze some aspects of the dynamics of the movement of a projectile in the vertical plane and short distance, considering that it interacts with two types of forces, the gravitational force, which is vertical and conservative and another that is due to the interaction of the projectile with the air particles (atmosphere) which results in a frictional force of dissipative nature. In the latter case we still consider the two forms of frictional force, one that is linearly proportional to the instantaneous velocity vector of the projectile and the other form where the frictional force is quadratically proportional to the vector of the instantaneous velocity of the projectile. In particular, we analyze how the projectile's mechanical energy dissipates in different parameters of the initial firing conditions, firing angle and initial velocity, in each case of the dissipative forms of the frictional forces.

Keywords: Projectile. Particle. Forces.

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar a Deus, aos familiares que sempre me apoiaram nessa jornada, principalmente a minha mãe que apesar das dificuldades que passamos juntos, depois que perdemos nossa casa no incêndio ela sempre me incentivava a não abandonar os estudos, aos colegas de classe. Aos professores que foram responsáveis pela obtenção de um abrangente conhecimento acerca da área de estudo.

Ao orientador Professor Dr. Yony Milla pelo seu auxílio, incentivo e exigência a qual contribuiu para um aprimoramento e eficácia do trabalho de pesquisa aqui defendido.

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO	8
2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA.....	10
2.1 Equações de Movimento Linear	10
2.1.1 Posição em X	11
2.1.2 Velocidade em Y	12
2.2 Intervalo de subida	12
2.3 Equação da posição em y	13
2.4 Altura máxima	13
2.5 Equação da Trajetória do Projétil	13
2.6 Posição de impacto do projétil.....	14
2.7 Alcance Máximo	15
2.8 Energia dissipada do movimento de translação Linear	16
3. EQUAÇÕES DE MOVIMENTO PARA O QUADRADO DA VELOCIDADE	18
3.1 Equações de movimento para a velocidade proporcional ao quadrado da velocidade, definindo $q = km$ em relação ao ângulo β_0	18
3.2 Equações do Movimento vertical Lançamento Vertical	18
3.3 Equações da Posição no eixo X , Y	19
3.4 Altura da trajetória	21
3.5 Calculo do tempo em relação a β e β_0	22
3.6 As velocidades v em relação ao ângulo β e a velocidade externa(ve)	23
3.7 Energia dissipada do movimento de translação	25
4. CONSIDERAÇÕES FINAIS	26
REFERÊNCIAS.....	27

1. INTRODUÇÃO

É muito comum ao estudarmos a Dinâmica de uma partícula e nos depararmos com a relação entre movimento de um corpo e a causa desse movimento, pois sabemos que a causa deste é o resultado da interação com outros corpos. No caso do movimento parabólico a trajetória descrita por um projétil é o resultado da interação com as partículas suspensas no ar atmosférico e a gravidade, provocando uma aceleração nela.

Desde o ponto de vista cinemático, o movimento parabólico pode ser descomposto em dois eixos, o eixo horizontal e o eixo vertical, tendo no eixo horizontal um movimento do tipo retilíneo uniforme (MRU) e no eixo vertical, considerando o valor local e constante da gravidade, um movimento do tipo retilíneo uniformemente acelerado (MRUV).

Nesse sentido, as equações de movimento do projétil podem ser resolvidas tanto cinematicamente como dinamicamente a través do teorema da conservação de energia mecânica, isto é por que a ação da gravidade gera uma força conservativa. Assim, todos os parâmetros do movimento parabólico podem ser calculados, isto é, seu alcance máximo, altura máxima, tempo de voo, etc.

No caso de um movimento real do projétil, vários fatores adicionais devem ser considerados nas equações de movimento, estes fatores podem ser a força de atrito do ar, geometria do projétil e até os efeitos de rotação da Terra, neste último, um sistema de referencia não inercial deve ser introduzido para escrever as equações de movimento.

Nesse sentido vários trabalhos já foram realizados considerado a resistência no movimento do projétil, onde são analisados alguns parâmetros em determinadas configurações dinâmicas [1] [2] [3] [4].

Neste trabalho de TCC, nós vamos a considerar o movimento do projétil de curta distância, dessa forma os efeitos de rotação da Terra não serão incluídos, nós somente consideraremos a força resistiva do ar, porém, serão analisados os casos onde essa força de atrito é linearmente proporcional a velocidade do projétil e quadraticamente proporcional a velocidade do projétil, respectivamente. Alguns parâmetros cinemáticos e dinâmicos do movimento serão discutidos em cada caso.

Este trabalho monográfico será dividido em quatro capítulos. Segue uma breve descrição do que o leitor encontrará em cada um deles.

- a) O primeiro capítulo descreve a introdução do trabalho.
- b) O segundo está relacionado sobre a fundamentação teórica e, nesta incluem-se também as equações de movimento, altura máxima, equação da trajetória do projétil, os intervalos de subida, posição de impacto de projétil, alcance máximo e a energia dissipativa do projétil.
- c) O terceiro descreve as equações de movimento para o quadrado da velocidade e a energia dissipativa do projétil para o quadrado da velocidade.
- d) No quarto capítulo as considerações finais.

2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Quando se pensa em analisar um movimento parabólico devemos relacionar com este movimento a segunda lei de Newton, pois esta é que nos vai possibilitar a descrever o que irá acontecer durante este percurso, seja com resistência do ar ou sem.

Nos estudos já realizados, muitos fazem suas análises sem levar em consideração as forças dissipativas, onde seus resultados de forma analítica descrevem as equações de movimento e da trajetória.

Já os voltados com resistência do ar proporcional a velocidade e proporcional ao quadrado da velocidade que não são muitos estudos feitos, esses se restringem em apenas descrever as suas velocidades nos eixos vertical e horizontal e a sua trajetória descrita no movimento.

2.1 Equações de Movimento Linear

Vamos considerar uma partícula de massa m lançada obliquamente com velocidade (inicial) de módulo $v_0 > 0$ segundo um ângulo $\theta \in (0; \pi/2)$ como mostra a figura 1, em relação ao solo suposto inercial [1].

Vamos considerar que a partícula, uma vez lançada, estará sob ação da força peso.

$$\vec{F} = -m\vec{g} \quad (*)$$

E de uma força resistiva, que vamos supor ser proporcional à velocidade

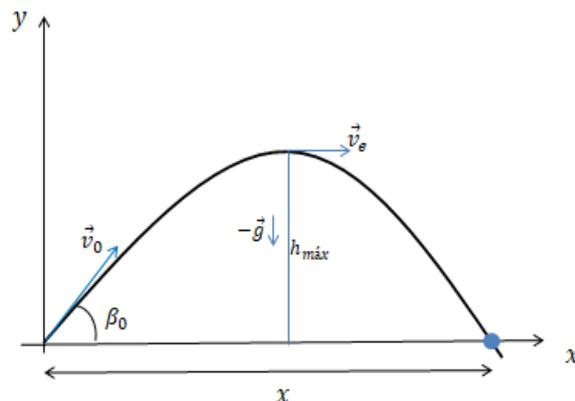
$$\vec{f} = -k\vec{v}, \quad (**)$$

Sendo $\vec{v} = v_x i + v_y j$ e $k > 0$ e constante.

Definimos que as condições iniciais serão dadas por

$$\vec{v}(0) = v_0 \cos\theta i + v_0 \sin\theta j.$$

Figura 1 - Parâmetros básicos do Movimento



Fonte: Autor

Analisando a figura 1 é o esboço da trajetória do projétil de massa m , lançado com ângulo de disparo β_0 e velocidade inicial \vec{v}_0

Portanto vamos escrever as componentes cartesianas em termos de

$$v'_x(0) = v_0 \cos \theta \quad (***)$$

$$v'_y(0) = v_0 \sin \theta, \quad (***)$$

para $x(0) = 0$ e $y(0) = 0$.

Da primeira condição de equilíbrio podemos determinar a velocidade no eixo

X:

$$F_R = f$$

$$m \frac{dv}{dt} = -kv \Rightarrow \frac{dv}{v} = -\frac{k}{m} dt \Rightarrow \int_{v_{0x}}^{v_x} \frac{dv}{v} = -\frac{k}{m} \int_0^t dt$$

$$-\frac{kt}{m} = \ln v_x - \ln v_{0x} \Rightarrow -kt = \ln \left(\frac{v_x}{v_{0x}} \right)$$

Lembramos que $y = e^x \Leftrightarrow x = \ln(y)$

$$e^{-\frac{kt}{m}} = \frac{v_x}{v_{0x}} \quad (1)$$

Substituindo (***) na expressão acima, obtemos:

$$v_x(t) = v_0 \cos \beta_0 e^{-\frac{kt}{m}} \quad (2)$$

2.1.1 Posição em X

Sendo $v_x = \frac{dx}{dt}$ e substituindo na equação (2), obtemos a equação que queremos.

$$v_{0x} e^{-\frac{kt}{m}} = \frac{dx}{dt} \Rightarrow v_{0x} \int_0^t e^{-\frac{kt}{m}} dt = \int_0^x dx \Rightarrow v_{0x} \left[-\frac{m}{k} \left(e^{-\frac{kt}{m}} - 1 \right) \right]$$

$$x(t) = \frac{m}{k} v_0 \cos \beta_0 \left(1 - e^{-\frac{kt}{m}} \right) \quad (3)$$

A expressão acima nos fornece a posição do projétil no eixo das abscissas.

Da equação (3), obtemos:

$$\frac{xk}{mv_0 \cos \beta_0} = \left(1 - e^{-\frac{kt}{m}} \right) \quad (4)$$

novamente de (3), obtemos:

$$e^{-\frac{kt}{m}} = 1 - \frac{xk}{mv_0 \cos \beta_0}, \text{ mas } y = e^x \Leftrightarrow x = \ln(y),$$

Logo:

$$-\frac{kt}{m} = \ln \left(1 - \frac{xk}{mv_0 \cos \beta_0} \right) \Rightarrow t = -\frac{m}{k} \ln \left(1 - \frac{xk}{mv_0 \cos \beta_0} \right)$$

$$t = -\frac{m}{k} \ln \left(1 - \frac{xk}{mv_0 \cos \theta} \right) \quad (5)$$

2.1.2 Velocidade em Y

Para determinarmos a velocidade no eixo das ordenadas devemos primeiro fazer a relação de equilíbrio do sistema.

$$F_R = f - mg$$

$$m \frac{dv}{dt} = -kv - mg \Rightarrow m \frac{dv}{dt} = -\left(g + \frac{kv}{m}\right)$$

$$\frac{dv}{\left(g + \frac{kv}{m}\right)} = dt \Rightarrow \int_{v_{0y}}^{v_y} \frac{dv}{\left(g + \frac{kv}{m}\right)} = -\int_0^t dt \Rightarrow \frac{m}{k} \ln \left(g + \frac{kv_y}{m} - g + \frac{kv_{0y}}{m} \right) = -t$$

$$\frac{m}{k} \ln \left(\frac{g + \frac{kv_y}{m}}{g + \frac{kv_{0y}}{m}} \right) = -t \Rightarrow \ln \left(\frac{g + \frac{kv_y}{m}}{g + \frac{kv_{0y}}{m}} \right) = -\frac{m}{k} t \Rightarrow \left(\frac{g + \frac{kv_y}{m}}{g + \frac{kv_{0y}}{m}} \right) = e^{-\frac{kt}{m}}$$

$$\left(g + \frac{kv_y}{m} \right) = \left(g + \frac{kv_{0y}}{m} \right) e^{-\frac{kt}{m}} \Rightarrow \frac{kv_y}{m} = -g + \left(g + \frac{kv_{0y}}{m} \right) e^{-\frac{kt}{m}}$$

$$v_y = \frac{m}{k} \left[-g + \left(g + \frac{kv_{0y}}{m} \right) e^{-\frac{kt}{m}} \right] \quad (6)$$

Esta expressão é que nos fornece a velocidade que o projétil percorre no eixo das ordenadas.

2.2 Intervalo de subida

Sabemos que no ponto mais alto da trajetória $v_y = 0$ e aplicando na equação (6), obtemos:

$$0 = -\frac{mg}{k} + \left(\frac{mg}{k} + v_{0y} \right) e^{-\frac{kt}{m}}$$

$$\frac{mg}{k} = \left(\frac{mg}{k} + v_{0y} \right) e^{-\frac{kt}{m}} \Rightarrow \frac{mg}{k} = \left(\frac{mg}{k} + v_{0y} \right) e^{-\frac{kt}{m}}$$

$$\frac{mg}{k} = \left(\frac{mg}{k} + v_{0y} \right) e^{-\frac{kt}{m}} \Rightarrow \frac{mg}{k} \left(\frac{k}{mg} + \frac{1}{v_{0y}} \right) = e^{-\frac{kt}{m}}$$

$$\frac{mg}{k} \left(\frac{k}{mg} + \frac{1}{v_{0y}} \right) = e^{-\frac{kt}{m}} \Rightarrow \left(1 + \frac{mg}{v_{0y}} \right) = e^{-\frac{kt}{m}}$$

$\left(1 + \frac{mg}{v_{0y}} \right) = e^{-\frac{kt}{m}}$, utilizando a expressão (1), obtemos:

$$t_s = -\frac{kt}{m} - \frac{m}{k} \ln \left(1 + \frac{mg}{v_{0y}} \right) \quad (7)$$

Vamos definir $t_s = \gamma$ que é a equação que encontramos para o tempo de voo do projétil.

2.3 Equação da posição em y

Sando que $v_y = \frac{dy}{dt}$ e aplicando em (6), obtemos:

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{mg}{k} + \left(\frac{mg}{k} + v_{0y}\right) e^{-\frac{kt}{m}} \Rightarrow dy = \left[-\frac{mg}{k} + \left(\frac{mg}{k} + v_{0y}\right) e^{-\frac{kt}{m}}\right] dt$$

$$\int_{y_0}^{y(t)} dy = -\frac{mg}{k} \int_0^t dt + \left(\frac{mg}{k} + v_{0y}\right) \int_0^t e^{-\frac{kt}{m}} dt$$

$$y(t) - y_0 = -\frac{mg}{k} t + \left(\frac{mg}{k} + v_{0y}\right) \left[-\frac{m}{k} \left(e^{-\frac{kt}{m}} - 1\right)\right]$$

$$y(t) - y_0 = -\frac{mg}{k} t + \left(\frac{mg}{k} + v_{0y}\right) \left[\frac{m}{k} \left(1 - e^{-\frac{kt}{m}}\right)\right]$$

$$y(t) - y_0 = -\frac{mg}{k} t + \left(\frac{m^2 g}{k^2} + \frac{mv_{0y}}{k}\right) \left(1 - e^{-\frac{kt}{m}}\right)$$

Substituindo (****) na equação acima, obtemos:

$$y(t) = y_0 + \frac{mg}{k} t + \left(\frac{m^2 g}{k^2} + \frac{mv_0 \text{sen} \beta_0}{k}\right) \left(1 - e^{-\frac{kt}{m}}\right) \quad (8)$$

Na expressão acima nos mostra como podemos determinar a posição do projétil na vertical.

2.4 Altura máxima

Vamos definir $h_{m\acute{a}x} = y(t)$ e substituindo na equação (8), obtemos a expressão abaixo.

$$h_{m\acute{a}x} = -\frac{mg}{k} t + \left(\frac{m^2 g}{k^2} + \frac{mv_0 \text{sen} \beta_0}{k}\right) \left(1 - e^{-\frac{kt}{m}}\right)$$

Agora vamos substituir (7) na expressão acima, obtemos:

$$h_{m\acute{a}x} = -\frac{mg}{k} \gamma + \left(\frac{m^2 g}{k^2} + \frac{mv_0 \text{sen} \beta_0}{k}\right) \left(1 - e^{-\frac{k\gamma}{m}}\right) \quad (9)$$

Esta equação acima mostra de forma devemos determinar a altura máxima no ponto mais alto da trajetória.

2.5 Equação da Trajetória do Projétil

Para podermos determinar uma equação para trajetória do projétil vamos utilizar as equações (4) e (5) e substituir na equação (8).

$$y(x) = -\frac{mg}{k} \left(-\frac{m}{k} \ln \left(1 - \frac{xk}{mv_0 \cos \beta_0}\right)\right) + \left(\frac{m^2 g}{k^2} + \frac{mv_0 \text{sen} \beta_0}{k}\right) \left(1 - e^{-\frac{kt}{m}}\right)$$

$$y(x) = -\frac{mg}{k} \left(-\frac{m}{k} \ln \left(1 - \frac{xk}{mv_0 \cos \beta_0}\right)\right) + \left(\frac{m^2 g + mkv_0 \text{sen} \beta_0}{k^2}\right) \left(1 - e^{-\frac{kt}{m}}\right)$$

$$y(x) = -\frac{mg}{k} \left(-\frac{m}{k} \ln \left(1 - \frac{xk}{mv_0 \cos \beta_0}\right)\right) + \left[\frac{1}{k^2} \left(\frac{m^2 g}{k^2} + \frac{mv_0 \text{sen} \beta_0}{k}\right) \left(\frac{xk}{mv_0 \text{sen} \beta_0}\right)\right]$$

$$\begin{aligned}
y(x) &= \frac{1}{k^2} \left(m^2 g \ln \left(1 - \frac{xk}{mv_0 \cos \beta_0} \right) \right) + \left[\frac{1}{k^2} \left(\frac{mgx}{kv_0 \cos \beta_0} + \frac{mv_0 \sin \beta_0 xk}{kmv_0 \cos \beta_0} \right) \right] \\
y(x) &= \frac{1}{k^2} \left(m^2 g \ln \left(1 - \frac{xk}{mv_0 \cos \beta_0} \right) \right) + \left[\frac{1}{k^2} \left(\frac{kmgx}{v_0 \cos \beta_0} + \frac{mv_0 \sin \beta_0 xk^2}{kmv_0 \cos \beta_0} \right) \right] \\
y(x) &= \frac{1}{k^2} \left[m^2 g \ln \left(1 - \frac{xk}{mv_0 \cos \beta_0} \right) + \left(\frac{kmgx}{v_0 \cos \beta_0} + \frac{mv_0 \sin \beta_0 xk^2}{kmv_0 \cos \beta_0} \right) \right] \\
y(x) &= \frac{1}{k^2} \left[m^2 g \ln \left(1 - \frac{xk}{mv_0 \cos \beta_0} \right) + \left(\frac{kmgx}{v_0 \cos \beta_0} + k^2 x \tan \beta_0 \right) \right] \tag{10}
\end{aligned}$$

A expressão encontrada nos fornece de que forma podemos determinar a trajetória que o projétil percorreu.

2.6 Posição de impacto do projétil

Derivando a equação (7) em relação ao ângulo em que foi disparado o projétil encontramos a equação da posição onde o projétil caiu de acordo com a relação da referência [2].

$$\begin{aligned}
y(x) &= \frac{1}{k^2} \left[m^2 g \ln \left(1 - \frac{xk}{mv_0 \cos \beta_0} \right) + \left(\frac{kmgx}{v_0 \cos \beta_0} + k^2 x \tan \beta_0 \right) \right] \\
0 &= \frac{d(y=0)}{d(\beta_0)} = \frac{d}{d(\beta_0)} \left\{ \frac{1}{k^2} \left[m^2 g \ln \left(1 - \frac{xk}{mv_0 \cos \beta_0} \right) + \left(\frac{kmgx}{v_0 \cos \beta_0} + k^2 x \tan \beta_0 \right) \right] \right\} \\
0 &= m^2 g \left(- \frac{m^2 v_0^2 \sin(\beta_0) \cos(\beta_0) kx}{m^3 v_0^3 \cos^3(\beta_0) - m^2 v_0^2 \cos^2(\beta_0)} \right) + \frac{mg \sin(\beta_0) kx}{v_0 \cos^2(\beta_0)} + k^2 x \sec^2(\beta_0) \\
0 &= m^2 g \left(- \frac{m^2 v_0^2 \sin(\beta_0) \cos(\beta_0) kx}{m^3 v_0^3 \cos^3(\beta_0) - m^2 v_0^2 \cos^2(\beta_0)} \right) + \frac{mg \sin(\beta_0) kx}{v_0 \cos^2(\beta_0)} + k^2 x (1 + \tan^2(\beta_0)) \\
0 &= - \frac{m^2 g \sin(\beta_0) kx}{\cos(\beta_0) (mv_0 \cos(\beta_0) - kx)} + \frac{mg \sin(\beta_0) kx + k^2 x v_0 + k^2 x v_0 \cos^2(\beta_0)}{v_0 \cos^2(\beta_0)} \\
\frac{m^2 g \sin(\beta_0) kx}{\cos(\beta_0) (mv_0 \cos(\beta_0) - kx)} &= \frac{mg \sin(\beta_0) kx + k^2 x v_0 + k^2 x v_0 \cos^2(\beta_0)}{v_0 \cos^2(\beta_0)}
\end{aligned}$$

$$\frac{m^2 g \operatorname{sen}(\beta_0) k x v_0 \cos(\beta_0)}{(m v_0 \cos(\beta_0) - k x)} = m g \operatorname{sen}(\beta_0) k x + k^2 x v_0$$

$$\frac{m^2 g \operatorname{sen}(\beta_0) k x v_0 \cos(\beta_0)}{(m v_0 \cos(\beta_0) - k x)} - m g \operatorname{sen}(\beta_0) k x = k^2 x v_0$$

$$x = \frac{m v_0^2 \cos(\beta_0)}{m g \operatorname{sen}(\beta_0) + k v_0} \quad (11)$$

A equação acima nos fornece o ponto e impacto que o projétil atingiu o solo após percorrer a trajetória parabólica.

2.7 Alcance Máximo

De acordo com a relação da referência 2, vamos definir $Q = ax^2$ e substituindo em (9) e derivando novamente em relação ao ângulo de disparo, obtemos a expressão que nos fornece o a qual distância máxima o projétil pode percorrer.

$$ax^2 = \left\{ \frac{1}{k^2} \left[m^2 g \ln \left(1 - \frac{xk}{m v_0 \cos \beta_0} \right) + \left(\frac{k m g x}{v_0 \cos \beta_0} + k^2 x \tan \beta_0 \right) \right] \right\}$$

$$2axk^2 = m^2 g \left(- \frac{m^2 v_0^2 \operatorname{sen}(\beta_0) \cos(\beta_0) k x}{m^3 v_0^3 \cos^3(\beta_0) - m^2 v_0^2 \cos^2(\beta_0)} \right) + \frac{m g \operatorname{sen}(\beta_0) k x}{v_0 \cos^2(\beta_0)} + k^2 x (1 + \tan^2(\beta_0))$$

$$2axk^2 = - \frac{m^2 g \operatorname{sen}(\beta_0) k x}{\cos(\beta_0) (m v_0 \cos(\beta_0) - k x)} + \frac{m g \operatorname{sen}(\beta_0) k x}{v_0 \cos^2(\beta_0)} + k^2 x + k^2 x \left(\frac{\operatorname{sen}^2 \beta_0}{\cos^2 \beta_0} \right)$$

$$2axk^2 = kx \left[- \frac{m^2 g \operatorname{sen}(\beta_0)}{\cos(\beta_0) (m v_0 \cos(\beta_0) - k x)} + \frac{m g \operatorname{sen}(\beta_0)}{v_0 \cos^2(\beta_0)} + k + k \left(\frac{\operatorname{sen}^2 \beta_0}{\cos^2 \beta_0} \right) \right]$$

$$2ak = \left[- \frac{m^2 g \operatorname{sen}(\beta_0)}{\cos(\beta_0) (m v_0 \cos(\beta_0) - k x)} + \frac{m g \operatorname{sen}(\beta_0)}{v_0 \cos^2(\beta_0)} + k + k \left(\frac{\operatorname{sen}^2 \beta_0}{\cos^2 \beta_0} \right) \right]$$

$$2ak = \left[- \frac{m^2 g \operatorname{sen}(\beta_0)}{\cos(\beta_0) (m v_0 \cos(\beta_0) - k x)} + \frac{m g \operatorname{sen}(\beta_0) + k v_0}{v_0 \cos^2(\beta_0)} \right]$$

$$\frac{m^2 g \operatorname{sen}(\beta_0)}{\cos(\beta_0) (m v_0 \cos(\beta_0) - k x)} = \frac{m g \operatorname{sen}(\beta_0) + k v_0}{v_0 \cos^2(\beta_0)} - 2ak$$

$$\frac{m^2 g \operatorname{sen}(\beta_0) v_0 \cos^2(\beta_0)}{\cos(\beta_0) (m v_0 \cos(\beta_0) - kx)} = mg \operatorname{sen}(\beta_0) + k v_0 - 2akv_0 \cos^2(\beta_0)$$

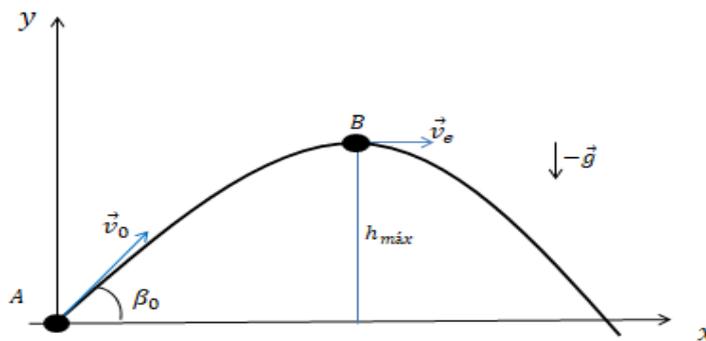
$$\frac{mkv_0^2 \cos(\beta_0) - 2amv_0^2 \cos^4(\beta_0)}{mg \operatorname{sen}(\beta_0) + k v_0 - 2akv_0 \cos^2(\beta_0)} = \cos(\beta_0) kx$$

$$X_{m\acute{a}x} = \frac{mv_0^2 \cos(\beta_m) (1 - 2a \cos^2(\beta_m))}{mg \operatorname{sen}(\beta_m) + k v_0 - 2av_0 \cos^2(\beta_m)} \quad (12)$$

A express\~ao mencionada serve para determinar o alcance m\~aximo que o proj\~etil percorreu at\~e atingir o solo.

2.8 Energia dissipada do movimento de transla\~c\~ao Linear

Figura 2 - Par\~ametros b\~asicos do Movimento



Fonte: Autor

Analisando a figura 2: a) \acute{E} o esbo\~co da trajet\~oria do proj\~etil de massa m , lan\~cado com \~angulo de disparo β_0 e velocidade inicial \vec{v}_0 , sendo A o ponto de partida do proj\~etil e B o ponto m\~aximo da trajet\~oria

$$v_e^2 = \frac{v_0 \cos \beta_0}{\left[1 + \frac{k \cos \beta_0}{mg} (\tan(\beta_0))\right]}$$

$$h_{m\acute{a}x} = -\frac{mg}{k} \gamma + \left(\frac{mg}{k} + v_0 \operatorname{sen} \beta_0\right) \cdot \left[\frac{m}{k} \left(e^{-\frac{k\gamma}{m}} - 1\right)\right]$$

$$\Delta E_{mL} = (U + K)_B - (U + K)_A$$

$$\Delta E_{mL} = \left(mgh_{m\acute{a}x} + \frac{1}{2}mv_e^2\right)_B - \left(0 + \frac{1}{2}mv_0^2\right)_A$$

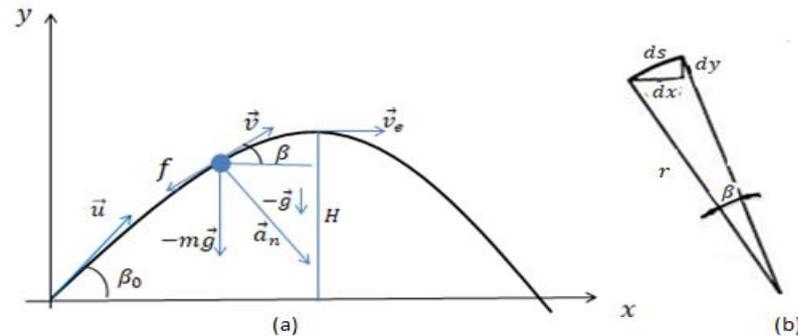
$$\Delta E_{mL} = mgh_{m\acute{a}x} + \frac{1}{2}mv_e^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 \quad (13)$$

A equação acima nos mostra a perda de energia o projétil do ponto inicial até atingir sua altura máxima, no ponto mais alto da trajetória.

3. EQUAÇÕES DE MOVIMENTO PARA O QUADRADO DA VELOCIDADE

Para nova expressões também vamos considerar uma partícula de massa m

Figura 3 - Parâmetros básicos do Movimento



Fonte: Autor

Analisando a figura 3: a) É o esboço da trajetória do projétil de massa m , lançado com ângulo de disparo β_0 e velocidade inicial \vec{u} , sendo β o ângulo com a horizontal e \vec{v} a velocidade num ponto genérico da trajetória. b) A representação do elemento da trajetória ds , sendo r o raio de curvatura. [1]

3.1 Equações de movimento para a velocidade proporcional ao quadrado da velocidade, definindo $q = \frac{k}{m}$ em relação ao ângulo β_0 .

Para o eixo x vamos determinar as equações da velocidade e a da posição analisamos os parâmetros da figura 3 - a.

$$m \frac{dv}{dt} = -kv^2 \Rightarrow \frac{dv}{dt} = -\frac{k}{m}v^2 \Rightarrow \int_{v_0}^{v(t)} \frac{dv}{v^2} = \int_0^t dt$$

$$v(t) = u(1 + qtu)^{-1} \quad (14)$$

Dá equação 14, vamos substituir a seguinte relação $v = \frac{dx}{dt}$, obteremos a expressão para a posição.

$$\int_{x_0}^{x(t)} dx = \int_0^t \frac{u}{1 + qtu} dt$$

$$x(t) = \frac{1}{q} \ln(1 + qtu) \quad (15)$$

3.2 Equações do Movimento vertical Lançamento Vertical

Para o eixo y vamos determinar as equações da altura máxima e do tempo de subida analisamos novamente os parâmetros da figura 3 - a.

$$m \frac{dv}{dt} = -kv^2 - mg$$

$\frac{dv}{dt} = -(qv^2 + g)$, vamos multiplicar por $-dy$, onde obteremos as expressões

mencionadas.

$$-\int_u^v \frac{v dv}{(qv^2 + g)} = \int_0^{y_{m\acute{a}x}} dy = \Rightarrow -\frac{1}{2q} \int_u^v \frac{ds}{s} = y_{m\acute{a}x}$$

$$-\frac{1}{2q} \cdot [\ln(qv^2 + g) - \ln(qu^2 + g)] = y_{m\acute{a}x}, \text{ para } v = 0, \text{ temos:}$$

$$y_{m\acute{a}x} = \frac{1}{2q} \cdot \left[\ln\left(\frac{qu^2 + g}{g}\right) \right] \quad (16)$$

Utilizaremos novamente a equação 16 para determinar o intervalo de subida do projétil.

$$\int_u^v \frac{dv}{(qv^2 + g)} = \int_0^{y_{m\acute{a}x}} -dt$$

$$t_s = \frac{1}{2qv} \left[\ln\left(\frac{qu^2 + g}{qv^2 + g}\right) \right] \quad (17)$$

Para a descida do projétil analisaremos a figura 3 – a e seus parâmetros e definiremos que no ponto mais alto da trajetória $v = 0$.

$$m \frac{dv}{dt} = kv^2 - mg \Rightarrow \frac{dv}{dt} = (qv^2 - g)$$

$$\int_u^v \frac{dv}{(qv^2 - g)} = \int_0^t dt \Rightarrow \frac{1}{2q} [\ln(qv^2 - g) - \ln(qu^2 - g)]$$

$$t_d = \frac{1}{2q} \left[\ln\left(\frac{-g}{qu^2 - g}\right) \right] \quad (18)$$

3.3 Equações da Posição no eixo X , Y .

Analisando a figura 3-a que nos possibilita exprimir os parâmetros da figura 3-b em relação aos ângulos β para poder determinarmos as expressões para as posições do e seu intervalo do projétil em relação aos ângulos β_0 e β .

$$m\vec{a}_n = -mg\cos\beta \quad (19)$$

$$a_n = \frac{v^2}{r} \quad (20)$$

$$\frac{1}{r} = \frac{d\beta}{ds} \quad (21)$$

$$v dt = ds \quad (22)$$

Substituindo a equação 22 em 20 obtemos a nova expressão para a aceleração normal da curva.

$$a_n = v^2 \frac{d\beta}{v dt}$$

$a_n = v \frac{d\beta}{dt}$, agora substituindo na equação 19 obtemos nova equação.

$$v \frac{d\beta}{dt} = -g \cos \beta \quad (23)$$

Analisando a figura 3-b e extraindo os parâmetros podemos encontrar uma expressão que nos possibilita de terminar a posição em X .

$$dx = d s \cos \beta \Rightarrow dx = v dt \cos \beta$$

$$\int dx = \int -\frac{v^2}{g} d\beta$$

$$x = x_0 - \frac{1}{g} \int_{\beta_0}^{\beta} v^2 d\beta \quad (24)$$

O método de cálculo para as quadraturas é baseado no uso da relação entre uma variável auxiliar $u = v \cos \beta$ e a variável independente β . Essa relação tem a seguinte forma diferencial [3].

$$\frac{du}{u^3} = k \frac{d\beta}{\cos^3 \beta}$$

Vamos considerar a primeira quadratura e escrevemos, usando a relação $u = v \cos \beta$, na forma [3].

$$x = x_0 - \frac{1}{g} \int_{\beta_0}^{\beta} \left(\frac{u^2}{\cos^2 \beta} \right) d\beta$$

$$x = x_0 - \frac{u^2 \tan \beta + u^2 \tan \beta_0}{g} + \frac{1}{g} \int_{\beta_0}^{\beta} \tan \beta du$$

$$x = x_0 - \frac{u^2 \tan \beta + u^2 \tan \beta_0}{g} + \frac{1}{g} \int_{\beta_0}^{\beta} \tan \beta \left(\frac{ku^3}{\cos^3 \beta} d\beta \right)$$

$$x = x_0 - \frac{u^2 \tan \beta + u^2 \tan \beta_0}{g} + \frac{1}{g} \int_{\beta_0}^{\beta} \tan \beta kv^3 d\beta$$

$$x = x_0 - \frac{u^2 \tan \beta + u^2 \tan \beta_0}{g} + \frac{1}{g} \int_{\beta_0}^{\beta} \tan \beta kv^3 \left(-\frac{g \cos \beta dx}{v} \right)$$

$$x = x_0 - \frac{u^2 \tan \beta + u^2 \tan \beta_0}{g} - \frac{k}{g} \int_{\beta_0}^{\beta} v^2 \operatorname{sen} \beta dx$$

$$x = x_0 - \frac{v^2 \operatorname{sen} \beta \cos \beta + v_0^2 \operatorname{sen} \beta_0 \cos \beta_0}{g} - \frac{k}{g} \int_{\beta_0}^{\beta} v^2 \operatorname{sen} \beta dx$$

$$x = x_0 - \frac{v^2 \operatorname{sen} \beta \cos \beta + v_0^2 \operatorname{sen} \beta_0 \cos \beta_0}{g} - kx(v^2 \operatorname{sen} \beta - v_0^2 \operatorname{sen} \beta_0) + k \int_{\beta_0}^{\beta} x d(v^2 \operatorname{sen} \beta)$$

$$x = x_0 + \frac{v_0^2 \operatorname{sen} 2\beta_0 - v^2 \operatorname{sen} 2\beta}{2g(1+\epsilon)} \quad (25)$$

O resultado da equação acima nos fornece determinar a posição do projétil a partir do ângulo inicial β_0 até ao ângulo β .

Para calcularmos y em relação aos ângulos β e β_0 os cálculos serão análogos que fizemos para determina x . Analisando a figura 3-b e extraindo os parâmetros podemos encontrar uma expressão que nos possibilita de determinar a posição em Y .

$$dy = ds \operatorname{sen} \beta \Rightarrow dy = v dt \operatorname{sen} \beta$$

$$\int dy = \int -\frac{v^2 \tan \beta}{g} d\beta$$

$$y = y_0 - \frac{1}{g} \int_{\beta_0}^{\beta} v^2 \tan \beta d\beta$$

$$y = y_0 - \frac{u^2 \tan^2 \beta + u^2 \tan^2 \beta_0}{2g} + \frac{1}{g} \int_{\beta_0}^{\beta} \tan \beta du$$

$$y = y_0 - \frac{u^2 \tan^2 \beta + u^2 \tan^2 \beta_0}{2g} + \frac{1}{g} \int_{\beta_0}^{\beta} \tan \beta \left(\frac{ku^3}{\cos^3 \beta} d\beta \right)$$

$$y = y_0 - \frac{u^2 \tan^2 \beta + u^2 \tan^2 \beta_0}{2g} + \frac{1}{g} \int_{\beta_0}^{\beta} \tan \beta kv^3 d\beta$$

$$y = y_0 - \frac{u^2 \tan^2 \beta + u^2 \tan^2 \beta_0}{2g} + \frac{1}{g} \int_{\beta_0}^{\beta} \tan \beta kv^3 \left(-\frac{g \cos \beta dy}{v} \right)$$

$$y = y_0 - \frac{u^2 \tan^2 \beta + u^2 \tan^2 \beta_0}{2g} - \frac{k}{g} \int_{\beta_0}^{\beta} v^2 \operatorname{sen} \beta dy$$

$$y = y_0 - \frac{v^2 \operatorname{sen}^2 \beta + v_0^2 \operatorname{sen}^2 \beta_0}{2g} - ky(v^2 \operatorname{sen} \beta - v_0^2 \operatorname{sen} \beta_0) + k \int_{\beta_0}^{\beta} y d(v^2 \operatorname{sen} \beta)$$

Suponha que os limites de interação $\Delta\beta = \beta - \beta_0$ é uma família pequena. Então a integral pode ser calculada na área do trapézio com bases t_0 e t e altura $h = v^2 \operatorname{sen} \beta - v_0^2 \operatorname{sen} \beta_0$ e $\varepsilon = k(v^2 \operatorname{sen} \beta - v_0^2 \operatorname{sen} \beta_0)$ [3], como resultado fica na forma.

$$y = y_0 - \frac{v^2 \operatorname{sen}^2 \beta + v_0^2 \operatorname{sen}^2 \beta_0}{2g} - ky(v^2 \operatorname{sen} \beta - v_0^2 \operatorname{sen} \beta_0) + \frac{k}{2}(t_0 + t)(v^2 \operatorname{sen} \beta - v_0^2 \operatorname{sen} \beta_0)$$

$$y = y_0 + \frac{v_0^2 \operatorname{sen}^2 \beta_0 - v^2 \operatorname{sen}^2 \beta}{g(2+\varepsilon)} \quad (26)$$

3.4 Altura da trajetória

Vamos definir no ponto mais alto da trajetória $\beta = 0, y_0 = 0$ e $H = y$ para determinarmos a altura H da trajetória para isso vamos utilizar a equação acima .

$$y = y_0 + \frac{v_0^2 \text{sen}^2 \beta_0 - v^2 \text{sen}^2 \beta}{g(2 + \varepsilon)}$$

$$H = \frac{v_0^2 \text{sen}^2 \beta_0}{g(2 + k(v^2 \text{sen} \beta - v_0^2 \text{sen} \beta_0))}$$

$$H = \frac{v_0^2 \text{sen}^2 \beta_0}{g(2 - kv_0^2 \text{sen} \beta_0)} \quad (27)$$

A expressão que foi descrita acima nos fornece os parâmetros para determinarmos a altura máxima do projétil para o quadrado da velocidade.

3.5 Cálculo do tempo em relação a β e β_0

Para calcularmos tempo em relação aos ângulos β e β_0 os cálculos serão análogos que fizemos para determina Y. Analisando a figura 3-b e extraindo os parâmetros podemos encontrar uma expressão que nos possibilita de terminar o tempo.

$$v \frac{d\beta}{dt} = -g \cos \beta$$

$$\int dt = \int -\frac{v}{g \cos \beta} d\beta$$

$$t = t_0 - \frac{1}{g} \int_{\beta_0}^{\beta} \frac{v}{\cos \beta} d\beta$$

$$t = t_0 - \frac{u \tan \beta + u \tan \beta_0}{g} + \frac{1}{g} \int_{\beta_0}^{\beta} \tan \beta du$$

$$t = t_0 - \frac{u \tan \beta + u \tan \beta_0}{g} + \frac{1}{g} \int_{\beta_0}^{\beta} \tan \beta \left(\frac{ku^3}{\cos^3 \beta} d\beta \right)$$

$$t = t_0 - \frac{u \tan \beta + u \tan \beta_0}{g} + \frac{1}{g} \int_{\beta_0}^{\beta} \tan \beta kv^3 d\beta$$

$$t = t_0 - \frac{u \tan \beta + u \tan \beta_0}{g} + \frac{1}{g} \int_{\beta_0}^{\beta} \tan \beta kv^3 \left(-\frac{g \cos \beta dt}{v} \right)$$

$$t = t_0 - \frac{u \tan \beta + u \tan \beta_0}{g} - \frac{k}{g} \int_{\beta_0}^{\beta} v^2 \text{sen} \beta dt$$

$$t = t_0 - \frac{v^2 \text{sen} \beta + v_0^2 \text{sen} \beta_0}{2g} - ky(v^2 \text{sen} \beta - v_0^2 \text{sen} \beta_0) + k \int_{\beta_0}^{\beta} td(v^2 \text{sen} \beta)$$

Suponha que os limites de interação $\Delta\beta = \beta - \beta_0$ é uma família pequena. Então a integral pode ser calculada na área do trapézio com bases t_0 e t e altura $h = v^2 \text{sen} \beta - v_0^2 \text{sen} \beta_0$ e $\varepsilon = k(v^2 \text{sen} \beta - v_0^2 \text{sen} \beta_0)$ [3], como resultado fica na forma.

$$t = t_0 - \frac{v^2 \operatorname{sen} \beta + v_0^2 \operatorname{sen} \beta_0}{g} - ky(v^2 \operatorname{sen} \beta - v_0^2 \operatorname{sen} \beta_0) + \frac{k}{2}(t_0 + t)(v^2 \operatorname{sen} \beta - v_0^2 \operatorname{sen} \beta_0)$$

$$t = t_0 + \frac{2(v_0^2 \operatorname{sen}^2 \beta_0 - v^2 \operatorname{sen}^2 \beta)}{g(2 + \varepsilon)} \quad (28)$$

3.6 As velocidades v em relação ao ângulo β e a velocidade externa (v_e)

No caso para a resistência do ar v^n pode ser tratado explicitamente a partir dessas relações por um método de Legendre [4].

$$\frac{1}{v^n} = -\frac{nk \cos^n \beta}{mg} \int_{\beta_0}^{\beta} \frac{du}{\cos^{n+1} \beta} + \frac{\cos^n \beta}{v_0^n \cos^n \beta_0}$$

Para determinarmos a velocidade v , vamos definir $n = 2$ e substituir na equação acima e então encontraremos a velocidade, mas primeiro vamos resolver a integral.

$$\int_{\beta_0}^{\beta} \frac{du}{\cos^{n+1} \beta}$$

$$\int_{\beta_0}^{\beta} \frac{du}{\cos^3 \beta} = \frac{1}{2} \left[\frac{\operatorname{sen} \beta}{\cos^2 \beta} + \ln \left(\tan \left(\frac{\beta}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right) - \frac{\operatorname{sen} \beta_0}{\cos^2 \beta_0} + \ln \left(\tan \left(\frac{\beta_0}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right) \right]$$

$$f(\beta) = \frac{1}{2} \left[\frac{\operatorname{sen} \beta}{\cos^2 \beta} + \ln \left(\tan \left(\frac{\beta}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right) \right]$$

$$f(\beta_0) = \frac{1}{2} \left[\frac{\operatorname{sen} \beta_0}{\cos^2 \beta_0} + \ln \left(\tan \left(\frac{\beta_0}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right) \right]$$

Agora vamos substituir as soluções das integrais na equação abaixo

$$\frac{1}{v^n} = -\frac{nk \cos^n \beta}{mg} \int_{\beta_0}^{\beta} \frac{du}{\cos^{n+1} \beta} + \frac{\cos^n \beta}{v_0^n \cos^n \beta_0}$$

$$\frac{1}{v^2} = -\frac{2k \cos^2 \beta}{mg} \left[\frac{1}{2} (f(\beta) - f(\beta_0)) \right] + \frac{\cos^2 \beta}{v_0^2 \cos^2 \beta_0}$$

$$\frac{1}{v^2} - \frac{\cos^2 \beta}{v_0^2 \cos^2 \beta_0} = -\frac{2k \cos^2 \beta}{mg} \left[\frac{1}{2} (f(\beta) - f(\beta_0)) \right]$$

$$\frac{v_0^2 \cos^2 \beta_0 - \cos^2 \beta}{v^2 v_0^2 \cos^2 \beta_0} = -\frac{k \cos^2 \beta}{mg} [(f(\beta) - f(\beta_0))]$$

$$v_0^2 \cos^2 \beta_0 - \cos^2 \beta = -\frac{k \cos^2 \beta}{mg} [(f(\beta) - f(\beta_0))] \cdot v^2 v_0^2 \cos^2 \beta_0$$

$$v^2 = \frac{v_0^2 \cos^2 \beta_0}{-\frac{k \cos^2 \beta}{mg} [(f(\beta) - f(\beta_0))] \cdot v_0^2 \cos^2 \beta_0 + \cos^2 \beta}$$

$$v^2(\beta) = \frac{v_0^2 \cos^2 \beta_0}{\cos^2 \beta \left[1 - \frac{k \cos^2 \beta_0 v_0^2}{mg} [(f(\beta) - f(\beta_0))] \right]}$$

$$v(\beta) = \frac{v_0 \cos \beta_0}{\cos \beta \sqrt{1 - \frac{k \cos^2 \beta_0 v_0^2}{mg} [(f(\beta) - f(\beta_0))]} \quad (29)$$

A expressão acima nos mostra a velocidade em relação ao ângulo β antes da altura máxima atingida pelo projétil.

Para determinarmos v_e no ponto mais alto da trajetória, vamos definir $\beta = 0$ os cálculos serão análogo da equação acima e a sua velocidade inicial será definida como sendo $u = v_0$.

$$\frac{1}{v^2} = -\frac{2k \cos^2 \beta}{mg} \left[\frac{1}{2} (f(\beta) - f(\beta_0)) \right] + \frac{\cos^2 \beta}{v_0^2 \cos^2 \beta_0}$$

$$\frac{1}{v^2} = -\frac{k}{mg} [(-f(\beta_0))] + \frac{1}{v_0^2 \cos^2 \beta_0}$$

$$\frac{1}{v^2} - \frac{1}{v_0^2 \cos^2 \beta_0} = +\frac{k \cos^2 \beta}{mg} [(f(\beta_0))]$$

$$v_0^2 \cos^2 \beta_0 - v^2 = +\frac{k \cos^2 \beta}{mg} [(f(\beta_0))] \cdot v^2 v_0^2 \cos^2 \beta_0$$

$$v_e = \frac{v_0 \cos \beta_0}{\sqrt{1 + \frac{k \cos^2 \beta_0 v_0^2}{mg} [f(\beta_0)]}} \quad (30)$$

A equação acima nos mostra a velocidade externa na altura máxima atingida pelo projétil.

Agora se formos definir como sendo $n = 1$, teremos outras representações, os cálculos será análogos aos já feitos para as equações acima, segue abaixo as soluções das velocidades.

$$\frac{1}{v^n} = -\frac{nk \cos^n \beta}{mg} \int_{\beta_0}^{\beta} \frac{du}{\cos^{n+1} \beta} + \frac{\cos^n \beta}{v_0^n \cos^n \beta_0}$$

$$\frac{1}{v} = -\frac{k \cos \beta}{mg} \int_{\beta_0}^{\beta} \frac{du}{\cos^2 \beta} + \frac{\cos \beta}{v_0 \cos \beta_0}$$

$$\int_{\beta_0}^{\beta} \frac{du}{\cos^2 \beta} = (\tan(\beta) - \tan(\beta_0))$$

$$\frac{1}{v} = -\frac{k \cos^2 \beta}{mg} [(\tan(\beta) - \tan(\beta_0))] + \frac{\cos^2 \beta}{v_0 \cos^2 \beta_0}$$

$$v(\beta) = \frac{v_0 \cos \beta_0}{\cos \beta \left[1 - \frac{k \cos \beta_0 v_0}{mg} [\tan(\beta) - \tan(\beta_0)] \right]} \quad (31)$$

A expressão acima nos mostra a velocidade em relação ao ângulo β antes da altura máxima atingida pelo projétil para velocidade linear.

Para determinarmos v_e no ponto mais alto da trajetória, vamos definir $\beta = 0$ os cálculos serão análogo da equação acima e a sua velocidade inicial será definida como sendo $u = v_0$ (ver figura 3).

$$\frac{1}{v} = -\frac{k \cos \beta}{mg} [\tan(\beta) - \tan(\beta_0)] + \frac{\cos \beta}{v_0 \cos \beta_0}$$

$$\frac{1}{v} = -\frac{k}{mg} [(-\tan(\beta_0))] + \frac{1}{v_0 \cos \beta_0}$$

$$\frac{1}{v} - \frac{1}{v_0 \cos \beta_0} = +\frac{k \cos \beta}{mg} [\tan(\beta_0)]$$

$$v_0 \cos \beta_0 - v = +\frac{k \cos \beta}{mg} [\tan(\beta_0)] \cdot v v_0 \cos^2 \beta_0$$

$$v_e = \frac{v_0 \cos \beta_0}{1 + \frac{k \cos \beta_0 v_0}{mg} [\tan(\beta_0)]} \quad (32)$$

A equação acima nos mostra a velocidade externa na altura máxima atingida pelo projétil para velocidades lineares.

3.7 Energia dissipada do movimento de translação

$$v_e^2 = \frac{u^2 \cos^2 \beta_0}{\left[1 + \frac{k u \cos \beta_0}{mg} (f(\beta_0)) \right]}$$

$$H = -\frac{u^2 \sin^2 \beta_0}{k(2 + k u^2 \sin \beta_0)}$$

$$\Delta E_{mL} = (U + K)_B - (U + K)_A$$

$$\Delta E_{mL} = \left(mgH + \frac{1}{2} m v_0^2 \right)_B - \left(0 + \frac{1}{2} m v_e^2 \right)_A$$

$$\Delta E_{mL} = mgH + \frac{1}{2} m v_e^2 - \frac{1}{2} m u^2 \quad (33)$$

A equação acima nos mostra a perda de energia o projétil do ponto inicial até atingir sua altura máxima, no ponto mais alto da trajetória para o quadrado da velocidade.

4. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho foram analisado alguns dos aspectos da dinâmica do movimento de um projétil no plano vertical submetidas a forças resistivas do tipo linear e quadrática da velocidade da mesma, desde um tratamento analítico. Com certas restrições das condições iniciais encontramos as respectivas equações de movimento, o que nos possibilitou calcular a perda de energia mecânica do projétil, mostrando como ela depende dos parâmetros iniciais, ângulo de tiro e velocidade inicial.

A perda de energia é calculada analiticamente até que o projétil alcança sua altura máxima de voo, observando que se a velocidade do projétil for muito alta a perda de sua energia será maior quando a força de atrito é do tipo quadrático da velocidade do projétil, logo este irá analisar em particular a perda da energia do projétil quando este percorre os pontos citados na figura 3-a em um movimento parabólico. Com isto este busca que o leitor tenha uma visão do fenômeno que está ocorrendo chegue próximo do mais real possível e auxiliar em futuros estudos de Mecânica para o ensino de física.

REFERÊNCIAS

- [1] Lançamento Oblíquo com Resistência do Ar: Uma análise qualitativa.
Em: www.scielo.br.
- [2] Projectile Motion: Finding the Optimal Launch Angle
- [3] Approximate Analytical Investigation of Projectile Motion in a Medium with Quadratic Drag Force. Em: International Journal of Sports Science and Engineering Vol. 05 (2011) No. 01, pp. 027-042
- [4] Balistique extérieure Frédéric ELIE, 02/04/2004